

Gheorghe PROCOPIUC

Mihai ISPAS

P R O B L E M E
d e
A N A L I Z Ă
M A T E M A T I C Ă

IAȘI 2002

Prefață

Prezenta culegere de **Probleme de analiză matematică** se adresează studenților din facultățile de profil tehnic. Ea conține aceleași capitole ca și cursul de **Analiză matematică**, format electronic, situat pe același site. Înainte de abordarea oricărui capitol din această culegere se recomandă parcurgerea capitolului corespunzător al cursului, unde pot fi găsite noțiunile și rezultatele teoretice utilizate în formularea și rezolvarea problemelor propuse.

Culegerea pune la dispoziția studenților exerciții și probleme rezolvate, cu indicații de rezolvare sau propuse spre rezolvare, constituind un material util în desfășurarea seminariilor, dar și pentru o mai bună aprofundare a noțiunilor predate la curs.

Autorii

Cuprins

1	Elemente de teoria spațiilor metrice	5
1.1	Spații metrice	5
1.2	Mulțimea numerelor reale	9
2	Șiruri și serii	17
2.1	Șiruri de numere reale	17
2.2	Principiul contractiei	29
2.3	Șiruri în \mathbf{R}^p	31
2.4	Serii de numere reale	32
2.5	Serii cu termeni pozitivi	37
2.6	Serii cu termeni oarecare	43
3	Limite de funcții	47
3.1	Limita unei funcții reale de o variabilă reală	47
3.2	Limita unei funcții de o variabilă vectorială	50
4	Funcții continue	55
4.1	Continuitatea funcțiilor reale de o variabilă reală	55
4.2	Continuitatea uniformă a funcțiilor de o variabilă	57
4.3	Continuitatea funcțiilor de o variabilă vectorială	59
5	Derivate și diferențiale	63
5.1	Derivata și diferențiala funcțiilor de o variabilă	63
5.2	Proprietăți ale funcțiilor derivabile	67
5.3	Derivatele și diferențiala funcțiilor de n variabile	73
6	Funcții definite implicit	85
6.1	Funcții definite implicit de o ecuație	85
6.2	Funcții definite implicit de un sistem de ecuații	88
6.3	Transformări punctuale	90
6.4	Dependență și independență funcțională	93
6.5	Schimbări de variabile	95

7	Extreme pentru funcții de mai multe variabile	99
7.1	Puncte de extrem pentru funcții de mai multe variabile	99
7.2	Extreme pentru funcții definite implicit	101
7.3	Extreme condiționate	103
8	Șiruri și serii de funcții	107
8.1	Șiruri de funcții reale	107
8.2	Serii de funcții	111
8.3	Serii de puteri	115
8.4	Serii Taylor	116
9	Integrala Riemann și extinderi	119
9.1	Primitive. Integrala nedefinită	119
9.2	Integrala definită	124
9.3	Integrale improprii	131
9.4	Integrale cu parametri	135
10	Integrale curbilinii	139
10.1	Lungimea unui arc de curbă	139
10.2	Integrale curbilinii de primul tip	140
10.3	Integrale curbilinii de tipul al doilea	143
10.4	Independența de drum a integralelor curbilinii	145
10.5	Calculul ariei cu ajutorul integralei curbilinii	147
11	Integrale multiple	149
11.1	Integrala dublă	149
11.2	Aria suprafețelor	157
11.3	Integrala de suprafață de primul tip	159
11.4	Integrala de suprafață de tipul al doilea	161
11.5	Integrala triplă	163
12	Ecuatii diferențiale ordinare	171
12.1	Ecuatii diferențiale de ordinul întâi	171
12.2	Alte ecuații integrabile prin metode elementare	178
12.3	Ecuatii diferențiale de ordin superior	181
12.4	Ecuatii cărora li se poate micșora ordinul	182
13	Ecuatii și sisteme diferențiale liniare	183
13.1	Sisteme diferențiale liniare de ordinul întâi	183
13.2	Sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți	185
13.3	Ecuatii diferențiale liniare de ordinul n	190
13.4	Ecuatii de ordinul n cu coeficienți constanți	192
13.5	Ecuatia lui Euler	195

Capitolul 1

Elemente de teoria spațiilor metrice

1.1 Spații metrice

1.1 Fie $(G, +)$ un grup comutativ și $p : G \rightarrow \mathbf{R}_+$ o funcție ce satisface proprietățile:

- 1) $p(x) = 0$ d.d. $x = 0$;
- 2) $p(-x) = p(x)$, $\forall x \in G$;
- 3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in G$.

Să se arate că aplicația $d : G \times G \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x, y) = p(x - y)$, $\forall x, y \in G$ este o metrică pe G .

R: Verificăm că d satisface axiomele metricii: 1°. $d(x, y) = p(x - y) \geq 0$, $\forall x, y \in G$ pentru că $x - y = x + (-y) \in G$ și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow p(x - y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$; 2°. $d(x, y) = p(x - y) = p(-x + y) = p(y - x) = d(y, x)$; 3°. $d(x, y) = p(x - y) = p(x - z + z - y) \leq p(x - z) + p(z - y) = d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in G$.

1.2 Fie \mathbf{N} mulțimea numerelor naturale. Să se arate că următoarele aplicații sunt distanțe pe \mathbf{N} :

- 1) $d : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = |m - n|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$.
- 2) $d : \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$.
- 3) $d : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $d(m, n) = \left| \frac{m}{1 + m} - \frac{n}{1 + n} \right|$, $\forall m, n \in \mathbf{N}$.

1.3 Fie $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$, produsul cartezian constând din $n \geq 1$ factori și $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$. Să se arate că aplicațiile: $d, \delta, \Delta : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}_+$, definite prin:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}, \quad \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|, \quad \Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{k=1, n} |x_k - y_k|$$

sunt metrice pe \mathbf{R}^n .

R: Pentru d se aplică inegalitatea lui Minkowski:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}, \quad \forall \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

1.4 Să se hașureze în \mathbf{R}^2 sferele deschise $S(0, r)$, $r > 0$, relative la metricile d, δ, Δ .

1.5 Să se arate că d, δ, Δ sunt metrici echivalente pe \mathbf{R}^n .

R: Se demonstrează inegalitățile: $\Delta \leq \delta \leq \sqrt{n} \cdot d \leq n \cdot \Delta \leq n \cdot \delta \leq n\sqrt{n} \cdot \delta$.

1.6 Să se arate că $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, $d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ este o metrică pe \mathbf{R} .

R: Se ține seama că oricare ar fi $a, b, c \geq 0$ cu $a \leq b + c$, avem:

$$\frac{a}{1 + a} \leq \frac{b}{1 + b} + \frac{c}{1 + c},$$

deoarece din $0 \leq \alpha \leq \beta$ urmează $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{\beta}{1 + \beta}$.

1.7 Fie $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$ o metrică pe X . Să se arate că aplicația $\delta : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$ definită prin $\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ este de asemenea o metrică pe X .

1.8 Să se arate că într-un spațiu metric (X, d) avem:

- 1) $d(x_1, x_n) \leq \sum_{i=1}^n d(x_i, x_{i+1})$, $\forall x_1, \dots, x_n \in X$, $n \geq 2$.
- 2) $|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$, $\forall x, y, z \in X$.
- 3) $|d(x, y) - d(x', y')| \leq d(x, x') + d(y, y')$, $\forall x, x', y, y' \in X$.

R: 3) $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$.

1.9 Fie X o mulțime nevidă. Să se arate că aplicația $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

este o metrică pe X (metrica discretă pe X).

1.10 Să se arate că aplicația $d : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, definită prin:

$$d(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y, \\ 0, & x = y \end{cases}$$

este o metrică pe \mathbf{R}_+ .

1.11 Să se arate că aplicația $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ este o metrică pe \mathbf{R}^n .

1.12 Să se arate că următoarele aplicații sunt metrici pe mulțimile indicate:

1) $d(0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$.

2) $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}} - \frac{y}{1 + \sqrt{1 + y^2}} \right|$.

3) $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} |x_2 - y_2|, & x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_2| + |x_1 - y_1|, & x_1 \neq y_1, \end{cases}$$

(metrica mersului prin junglă), unde: $\mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

4) $d : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - y_2)^2}, & \text{dacă există o dreaptă } \delta \subset \mathbf{R}^2 \text{ a.î. } \mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \delta, \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, & \text{în rest,} \end{cases}$$

(metrica căii ferate franceze), unde: $\mathbf{0} = (0, 0), \mathbf{x} = (x_1, y_1), \mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

1.13 Să se arate că următoarele aplicații sunt norme pe \mathbf{R}^n :

1) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

2) $\|\mathbf{x}\| = \sum_{k=1}^n |x_k|, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

3) $\|\mathbf{x}\| = \sup |x_k|, k = \overline{1, n}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

1.14 Fie $\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix}, \text{ cu } a, b, c \in \mathbf{R}, i^2 = -1 \right\}$ și $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{R}_+$,

$f(A) = \sqrt{\det A}$. Să se arate că $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ este spațiu normat în raport cu norma dată prin $\|A\| = f(A)$.

1.15 Fie $\mathcal{C}_{[1, e]}^0 = \{f : [1, e] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ continuă pe } [1, e]\}$. Să se arate că aplicația $\|\cdot\| : \mathcal{C}_{[1, e]}^0 \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $\|f\| = \left[\int_1^e (f^2(x) \cdot \ln x) dx \right]^{1/2}$ este o normă pe $\mathcal{C}_{[1, e]}^0$ și să se găsească norma funcției $f(x) = \sqrt{x}$.

1.16 Fie $\mathcal{C}_{[0, 1]}^1 = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ derivabilă cu derivată continuă pe } [0, 1]\}$. Să se arate că următoarele aplicații sunt norme pe $\mathcal{C}_{[0, 1]}^1$:

1) $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. 2) $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$.

3) $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. 4) $\|f\| = \left[\int_0^1 f^2(x) dx \right]^{1/2}$.

1.17 Fie mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ și clasele:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset, X, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}, \\ \tau_2 &= \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.\end{aligned}$$

- 1) Să se arate că τ_1 este topologie pe X dar τ_2 nu este topologie pe X .
- 2) Să se găsească sistemele de vecinătăți ale punctelor 3 și 4 din spațiul topologic (X, τ_1) .

R: Se verifică proprietățile din definiția topologiei. Pentru τ_2 se constată că, de exemplu $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \tau_2$.

1.18 Fie $X = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ și familia de mulțimi:

$$\tau = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, X\}.$$

Să se arate că τ este o topologie pe X și să se determine sistemele de vecinătăți ale punctelor α, β, γ și δ .

1.19 Dacă $X \neq \emptyset$ și $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$, atunci (X, τ_0) este spațiu topologic pe X , numit spațiul topologic nondiscret (grosier) pe X .

1.20 Dacă $X \neq \emptyset$ și $\mathcal{P}(X)$ este mulțimea tuturor părților mulțimii X , iar $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$, atunci (X, τ_1) este spațiu topologic pe X , numit spațiul topologic discret pe X .

1.21 Dacă X are mai mult de două elemente și $a \in X$, fixat, atunci $\tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ este o topologie pe X , diferită de topologia nondiscretă și de cea discretă.

1.22 Fie $X = \{a, b, c, d, e\}$. Să se precizeze care dintre următoarele familii de părți ale lui X este o topologie pe X :

- 1) $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$.
- 2) $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.
- 3) $\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.

R: τ_1 și τ_2 nu, τ_3 da.

1.23 Fie $\tau = \{\emptyset, \mathbf{R}, (q, \infty)\}$, $q \in \mathbf{Q}$. Să se arate că τ este o topologie pe \mathbf{R} .

R: Mulțimea $A = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \{(q, \infty), q > \sqrt{2}\} = (\sqrt{2}, \infty)$ este o reuniune de mulțimi din τ , totuși ea nu aparține lui τ deoarece $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

1.24 Pe mulțimea $X = \{a, b, c\}$ următoarele familii de părți ale lui X sunt topologii:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}; & \tau_2 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}\}; \\ \tau_3 &= \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}; & \tau_4 &= \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}.\end{aligned}$$

1.25 Fie $\tau = \{\emptyset, \mathbf{R}, (-\alpha, \alpha)\}$, $\alpha > 0$. Să se arate că τ este o topologie pe \mathbf{R} .

1.26 Pe mulțimea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se consideră topologia:

$$\tau = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 5\}\}.$$

- 1) Să se găsească punctele interioare ale mulțimii $A = \{1, 2, 3\}$.
- 2) Să se găsească punctele exterioare ale mulțimii A .
- 3) Să se găsească punctele frontieră ale mulțimii A .

R: 1) $\text{Int } A = \{1, 2\}$ deoarece $1 \in \{1, 2\} \subset A$, $2 \in \{1, 2\} \subset A$. 3 nu este punct interior lui A deoarece nu aparține la nici o mulțime deschisă inclusă în A . 2) $\mathcal{C}A = \{4, 5\}$ și $\text{Int } \mathcal{C}A = \emptyset$, deci nu există puncte exterioare lui A . 3) $\text{Fr } A = \{3, 4, 5\}$.

1.27 Să se arate că următoarele familii de părți sunt topologii pe \mathbf{R} :

- 1) $\tau_i = \{\emptyset, \mathbf{R}, (a, \infty)\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, (topologia inferioară sau dreaptă a lui \mathbf{R}).
- 2) $\tau_s = \{\emptyset, \mathbf{R}, (-\infty, a)\}$, $\forall a \in \mathbf{R}$, (topologia superioară sau stângă a lui \mathbf{R}).

1.28 Să se găsească interiorul, exteriorul și frontiera intervalului $I = [3, \infty)$ relativ la spațiul topologic (\mathbf{R}, τ_i) , unde τ_i este topologia inferioară pe \mathbf{R} .

R: Cea mai amplă mulțime deschisă, conținută în I , este $(3, \infty)$, deci $\text{Int } A = (3, \infty)$. $\mathcal{C}I = (-\infty, 3]$ și nu conține nici o altă mulțime deschisă în afară de mulțimea vidă. $\text{Int } \mathcal{C}A = \emptyset$, $\text{Fr } A = (-\infty, 3]$.

1.2 Mulțimea numerelor reale

1.29 Să se arate că mulțimea $A = \{x_n = \sqrt[n]{n} + \frac{1}{\sqrt[n]{n}} + \frac{1}{n} + 1, n \in \mathbf{N}, n \geq 2\}$ este mărginită.

R: Din $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pentru orice număr real pozitiv, rezultă $x_n > 2 + 0 + 1 = 3$, adică $a = 3$ este un minorant pentru A . Cum pentru $n \geq 2$, $1 < \sqrt[n]{n} < 2$ și $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$, urmează $x_n < 2 + 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{2}$, adică $b = \frac{9}{2}$ este un majorant pentru A .

1.30 Să se arate că mulțimea $A_\alpha = \{y \in \mathbf{R}, y = \frac{\alpha x + 1}{x^2 + x + 2}, x \in \mathbf{R}\}$ este mărginită pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ și să se determine $\inf A_\alpha$ și $\sup A_\alpha$.

R: Fie $y \in A_\alpha$. Atunci: $yx^2 + (y - \alpha)x + 2y - 1 = 0$, care trebuie să aibă soluții reale. Deci $(y - \alpha)^2 - 4y(2y - 1) = -7y^2 - 2(\alpha - 2)y + \alpha^2 \geq 0$, de unde, notând cu $\beta = 2\sqrt{2\alpha^2 - \alpha} + 1$:

$$y \in \left[\frac{2 - \alpha - \beta}{7}, \frac{2 - \alpha + \beta}{7} \right].$$

Așadar:

$$\inf A_\alpha = \min A_\alpha = \frac{2 - \alpha - \beta}{7}, \quad \sup A_\alpha = \max A_\alpha = \frac{2 - \alpha + \beta}{7}.$$

1.31 Să se determine minoranții, majoranții, cel mai mic element și cel mai mare element (dacă există) ale următoarelor mulțimi de numere reale:

- 1) $A = \{\sin 1, \sin 2, \sin 3\}$. 2) $A = \left\{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$.
 3) $A = \left\{\frac{2^n - 1}{2^2 + 1}, n \in \mathbf{N}^*\right\}$. 4) $A = \{x \in \mathbf{R}, x^2 \leq 5\}$.
 5) $A = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 0, x^2 > 5\}$. 6) $A = \{x \in \mathbf{R}, x^3 - x \leq 0\}$.
 7) $A = \{x - \sin x, x \in \mathbf{R}\}$.

R: 1) Cum: $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$, $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, deoarece: $0 < \pi - 3 < 1 < \pi - 2 < \frac{\pi}{2}$ și funcția sinus este strict crescătoare pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rezultă:

$$\sin 0 < \sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2) < \sin \frac{\pi}{2}$$

și deci $0 < \sin 3 < \sin 1 < \sin 2 < 1$. Așadar: $\min A_1 = \sin 3$, $\max A_1 = \sin 2$ și orice număr $a \leq \sin 3$ este un minorant, iar orice număr $b \geq \sin 2$ este un majorant.

2) Deoarece $\frac{1}{n} \leq 1$, rezultă că $1 - \frac{1}{n} \geq 0$. Deci 0 este un minorant al mulțimii A_2 și orice număr $a \in (-\infty, 0]$ eare minorant. Nici un număr $a > 0$ nu poate fi minorant al mulțimii A_2 deoarece $0 \in A_2$ și din definiția minorantului ar rezulta că $a \leq 0$ (contradicție). Evident $\inf A_2 = \min A_2 = 0$. Mulțimea majoranților este $[1, \infty)$. Într-adevăr, $b \geq 1$ implică $b \geq 1 - \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Dacă $b < 1$ rezultă $1 - b > 0$ și atunci $\exists n \in \mathbf{N}^*$ a.î. $1 - b > \frac{1}{n}$ sau $b < 1 - \frac{1}{n}$, adică b nu ar mai fi majorant. Evident $\sup A_2 = 1$, în timp ce $\max A_2$ nu există.

3) Din inegalitatea:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2^n - 1}{2^2 + 1} < 1, n \in \mathbf{N}^*,$$

deducem că mulțimea minioranților lui A_3 este $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, mulțimea majoranților este $[1, \infty)$, $\inf A_3 = \min A_3 = \frac{1}{3}$, $\sup A_3 = 1$, iar $\max A_3$ nu există.

4) $\inf A_4 = \min A_4 = -\sqrt{5}$, $\sup A_4 = \max A_4 = \sqrt{5}$,

5) $\inf A_5 = \sqrt{5}$, $\sup A_5 = \infty$, 6) $\inf A_6 = -\infty$, $\sup A_6 = \infty$,

7) $\inf A_7 = -\infty$, $\sup A_7 = \infty$.

1.32 Să se determine $\inf A$, $\min A$, $\sup A$ și $\max A$ dacă:

- 1) $A = \{x \in \mathbf{R}, x = \frac{a+1}{a^2+a+1}, a \in \mathbf{R}\}$.
 2) $A = \{y \in \mathbf{R}, y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}, x \in \mathbf{R}\}$.
 3) $A = \{y \in \mathbf{R}, y = \frac{3x^2+4x\sqrt{3}-1}{x^2+1}, x \in \mathbf{R}\}$.

R: 1) Din $xa^2 + (x-1)a + x-1 = 0$, cu $a \in \mathbf{R}$, rezultă $A = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$. Deci $\inf A = \min A = -\frac{1}{3}$, $\sup A = \max A = 1$. 2) $A = \left[\frac{9-2\sqrt{21}}{3}, \frac{9+2\sqrt{21}}{3}\right]$. 3) $A = [-3, 5]$.

1.33 Utilizând axioma lui Arhimede, să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}^*$ există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. să avem:

$$1) x^2 + n \geq nx + 1. \quad 2) x^2 \geq 2x + n.$$

R: 1) Inegalitatea se mai scrie: $x^2 - 1 \geq n(x-1)$. Pentru $x = 1$ este evidentă. Dacă $x \neq 1$, pentru numărul real $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$, conform axiomei lui Arhimede, există $n \in \mathbf{Z}$ a.î. $x+1 \geq n$.

1.34 Fie $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n \in \mathbf{N}^*$ un șir descendent de segmente reale. Să se arate că:

- 1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ (Cantor-Dedekind).
- 2) Dacă $b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci există un număr $x_0 \in \mathbf{R}$, unic determinat, cu proprietatea că: $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}$.

R: 1) Din $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ rezultă că $a_n \leq b_m$, $\forall n, m \in \mathbf{N}^*$. Așadar mulțimea $A = \{a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginită superior (orice b_m este un majorant), iar mulțimea $B = \{b_m, m \in \mathbf{N}^*\}$ este mărginită inferior (orice a_n este un minorant). Există deci $\sup A$ și $\inf B$ și $\sup A \leq \inf B$. În concluzie, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \supset [\sup A, \inf B] \neq \emptyset$.

2) Dacă ar exista x și y cu $x < y$ și $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, atunci din $a_n \leq x < y \leq b_n$ rezultă: $0 < y - x \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{n}$, adică $n(y-x) \leq 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, ceea ce ar contrazice axioma lui Arhimede aplicată numerelor $y-x$ și 1.

1.35 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ și $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

R: Folosim metoda inducției matematice. $P(2)$: dacă $a_1, a_2 \in \mathbf{R}_+^*$ și $a_1 \cdot a_2 = 1$, atunci $a_1 + a_2 \geq 2$. Fie $a_1 \geq 1$ și $a_2 \leq 1$. Urmează $(a_1-1)(a_2-1) \leq 0$ sau $a_1 + a_2 \geq 1 + a_1 \cdot a_2 \geq 2$.

$P(n)$: dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$ și $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

$P(n+1)$: dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbf{R}_+^*$ și $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = 1$, atunci $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq n+1$.

Printre numerele $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ există cel puțin unul mai mare sau cel puțin egal cu 1 și cel puțin unul mai mic sau cel mult egal cu 1. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că acestea sunt a_1 și a_2 . Din $P(2)$ avem că $a_1 + a_2 \geq 1 + a_1 \cdot a_2$, de unde deducem:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq 1 + a_1 \cdot a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} \geq 1 + n,$$

deoarece $a_1 \cdot a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ sunt n numere al căror produs este 1.

1.36 Inegalitatea mediilor. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$ și A media aritmetică, G media geometrică, H media armonică a celor n numere, definite prin;

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \quad H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

Să se arate că au loc inegalitățile: $H \leq G \leq A$.

R: Din definiția mediei geometrice avem:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{G^n} = 1 \text{ sau } \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot \dots \cdot \frac{x_n}{G} = 1.$$

Luând în exercițiul precedent $a_k = \frac{x_k}{G}$, $k = \overline{1, n}$, obținem: $\frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \dots + \frac{x_n}{G} \geq n$, sau $A \geq G$. Înlocuind aici pe x_k prin $\frac{1}{x_k}$, $k = \overline{1, n}$, găsim $H \leq G$.

1.37 Inegalitatea lui Schwarz-Cauchy. Pentru orice numere reale a_1, a_2, \dots, a_n și b_1, b_2, \dots, b_n are loc inegalitatea:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

sau

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

R: Fie trinomul de gradul al doilea:

$$f(x) = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) x^2 - 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2),$$

care se mai scrie:

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 + (a_2 x - b_2)^2 + \dots + (a_n x - b_n)^2 \geq 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deci $\Delta \leq 0$, ceea ce implică inegalitatea dată.

1.38 Inegalitatea lui Minkowski. Pentru orice numere reale a_k, b_k , $k = \overline{1, n}$ are loc inegalitatea:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

R: Ținând seama de inegalitatea lui Schwarz-Cauchy, avem:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2,$$

sau

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2,$$

de unde, extrăgând radicalul rezultă inegalitatea dată.

1.39 Inegalitatea lui Bernoulli. Oricare ar fi $a \in [-1, \infty)$ și $\alpha \in [1, \infty)$ avem:
 $(1+a)^\alpha \geq 1 + \alpha a$.

R: Inegalitatea rezultă din studiul monotoniei funcției $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha - \alpha x - 1$, observând că aceasta are un minim egal cu 0 în $x = 0$.

1.40 Dacă $a \in [-1, \infty)$ și $n \in \mathbf{N}^*$ atunci: $(1+a)^n \geq 1 + na$.

R: Se ia în inegalitatea lui Bernoulli $\alpha = n$.

1.41 Dacă $b > 0$, $b \neq 1$, atunci: $\left(\frac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} > b^n$.

R: Aplicând inegalitatea lui Bernoulli, avem:

$$\left(\frac{1+nb}{n+1}\right)^{n+1} = \left(b + \frac{1-b}{n+1}\right)^{n+1} = b^{n+1} \left[1 + \frac{1-b}{b(n+1)}\right]^{n+1} > b^{n+1} \left(1 + \frac{1-b}{b}\right) = b^n.$$

1.42 Să se arate că:

$$1) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad 2) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

R: Se ia în inegalitatea precedentă $b = 1 + \frac{1}{n}$, respectiv $b = 1 - \frac{1}{n}$.

1.43 Să se arate că oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_n \geq -1$, de același semn, are loc inegalitatea (generalizare a inegalității lui Bernoulli):

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

R: Se folosește inducția matematică.

1.44 Inegalitatea lui Cebîșev. Fie a_1, a_2, \dots, a_n și b_1, b_2, \dots, b_n numere reale cu $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ și $S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$, $n \geq 2$, unde $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Să se arate că:

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leq S \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

R: Fie $j < k$, $i_j < i_k$ atunci $(a_j - a_k)(b_{i_j} - b_{i_k}) \geq 0$ implică: $a_j b_{i_j} + a_k b_{i_k} \geq a_j b_{i_k} + a_k b_{i_j}$. Deci orice inversiune în mulțimea $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ micșorează suma S , ca atare ea este maximă pentru permutarea identică $\{1, 2, \dots, n\}$ și minimă pentru permutarea $\{n, n-1, \dots, 1\}$.

1.45 Fie a_1, a_2, \dots, a_n și b_1, b_2, \dots, b_n numere reale cu $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$. Să se arate că:

$$n \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i\right).$$

R: Din exercițiul precedent rezultă că $\max S = \sum_{i=1}^n a_i b_i$. Avem deci inegalitățile:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1}. \end{aligned}$$

Prin adunare membru cu membru obținem inegalitatea din enunț.

1.46 Fie $a, b, c > 0$. Să se arate că:

$$1) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}. \quad 2) a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

R: Se aplică inegalitatea lui Cebîșev:

$$1) \text{ pentru tripletele } (a, b, c) \text{ și } \left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b} \right),$$

$$2) \text{ pentru tripletele: } (a^2, b^2, c^2) \text{ și } \left(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} \right), \text{ respectiv } (a^3, b^3, c^3) \text{ și } \left(\frac{a}{abc}, \frac{b}{abc}, \frac{c}{abc} \right).$$

1.47 Inegalitatea lui Hölder. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$, $p > 1$, $q > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}.$$

R: Dacă $\sum_{i=1}^n a_i^p = 0$ sau $\sum_{i=1}^n b_i^q = 0$ inegalitatea este evidentă. Fie:

$$A = \frac{a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p}, \quad B = \frac{b_i^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

și funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin: $f(x) = x^\alpha - \alpha x$, $\alpha \in (0, 1)$. Deoarece f are în $x = 1$ un maxim egal cu $1 - \alpha$, rezultă că: $x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha$, $\forall x \in [0, \infty)$. Luăm $x = \frac{A}{B}$

și $\alpha = \frac{1}{p}$, deci $1 - \alpha = \frac{1}{q}$, deducem: $A^{\frac{1}{p}} \cdot B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$. Înlocuind aici A și B , sumând apoi după i de la 1 la n , obținem inegalitatea din enunț.

1.48 Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ are loc inegalitatea:

$$1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3!} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{n!} \leq \frac{(n+1)!}{2^n}.$$

R: Se folosește majorarea: $\sqrt[k]{k!} = \sqrt[k]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1 + 2 + \dots + k}{k} = \frac{k+1}{k}$.

1.49 Dacă $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}_+^*$, atunci:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

R: Se folosește inegalitatea lui Schwarz-Cauchy cu $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, $i = \overline{1, n}$.

1.50 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, atunci:

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \geq 3^n.$$

R: Se folosește inegalitatea: $x + \frac{1}{x} \geq 2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}_+^*$.

1.51 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, $n \geq 2$ și $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ atunci:

$$\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

R: Notăm $b_i = \frac{1}{S - a_i}$, $i = \overline{1, n}$. Deoarece $S > a_i$ rezultă că $b_i > 0$. putem scrie:

$$(b_1 + b_2 + \dots + b_n) \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right) \geq n^2,$$

sau

$$\frac{n^2}{n-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \leq n \left(\frac{a_1}{S - a_1} + \frac{a_2}{S - a_2} + \dots + \frac{a_n}{S - a_n} \right).$$

1.52 Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, atunci:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}.$$

R: Se ține seama că $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ etc.

1.53 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, $n \geq 2$, atunci:

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

R: Se folosește inegalitatea mediilor.

1.54 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}_+^*$, atunci:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

R: Se înmulțesc membru cu membru inegalitățile: $1 + a_i \geq 2\sqrt{a_i}$, $i = \overline{1, n}$.

1.55 Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, atunci: $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

R: Se înmulțesc membru cu membru inegalitățile: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ etc.

1.56 Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$, atunci:

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

R: Se folosește inegalitatea mediilor pentru numerele: $\frac{a_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1, n}$ și respectiv: $\frac{b_i}{a_i + b_i}$, $i = \overline{1, n}$ și se adună inegalitățile obținute.

1.57 Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}_+^*$, atunci:

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

R: Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $a \geq b \geq c$. Din $a^{a-b} \geq b^{a-b}$, $b^{b-c} \geq c^{b-c}$, $a^{a-c} \geq c^{a-c}$ prin înmulțire membru cu membru se obține inegalitatea din enunț.

Capitolul 2

Șiruri și serii

2.1 Șiruri de numere reale

2.1 Folosind teorema de caracterizare cu ε a limitei unui șir, să se arate că:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n + (-4)^n}{5^n} = 0. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{n + 1} = +\infty.$$

R: 1) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Este suficient să arătăm că există un rang $N = N(\varepsilon)$ a.î.

$$\left| \frac{3 \cdot 4^n + (-4)^n}{5^n} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

$$\text{Dar } \left| \frac{3 \cdot 4^n + (-4)^n}{5^n} \right| \leq \frac{4 \cdot 4^n}{5^n} < \varepsilon \text{ pentru } n > \frac{\ln \frac{\varepsilon}{4}}{\ln \frac{4}{5}}. \text{ Așadar, putem lua}$$

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \varepsilon > 4, \\ \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{4}}{\ln \frac{4}{5}} \right\rceil, & \varepsilon \leq 4. \end{cases}$$

2) Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Este suficient să arătăm că există un rang $N = N(\varepsilon)$ a.î. $\frac{n^2 + 2}{n + 1} > \varepsilon, \forall n > N$. Însă $\frac{n^2 + 2}{n + 1} = n - 1 + \frac{3}{n + 1} > n - 1 > \varepsilon$, pentru $n > 1 + \varepsilon$. Putem lua $N(\varepsilon) = [1 + \varepsilon]$.

2.2 Folosind teorema de caracterizare cu ε a limitei unui șir, să se arate că:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n - 1} = \frac{1}{2}. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{5n - 1} = \frac{4}{5}. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2(n^2 + 1)} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Folosind criteriul lui Cauchy, să se arate că şirurile $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sunt convergente, unde:

$$1) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}. \quad 2) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{2^k}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$3) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{a^k}. \quad |\alpha_k| < 1, \quad k \in \mathbf{N}^*, \quad a > 1.$$

R: 1) Arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbf{N}^*$. Deoarece

$$\frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k},$$

avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Putem lua $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

2) Arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon)$ şi $p \in \mathbf{N}^*$. Avem:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right),$$

deci $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. Putem lua $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$.

3) Avem

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\alpha_{n+1}}{a^{n+1}} + \dots + \frac{\alpha_{n+p}}{a^{n+p}} \right| \leq \frac{|\alpha_{n+1}|}{a^{n+1}} + \dots + \frac{|\alpha_{n+p}|}{a^{n+p}} < \frac{1}{a^{n+1}} + \dots + \frac{1}{a^{n+p}},$$

deci $|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{a^n(a-1)} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{a} \right)^p \right] < \frac{1}{a^n(a-1)} < \varepsilon$ pentru $n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon(a-1)}}{\ln a}$.

Putem lua $N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon(a-1)}}{\ln a} \right\rceil$.

2.4 Folosind criteriul lui Cauchy, să se arate că şirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este divergent, unde

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

R: Este suficient să arătăm că există un $\varepsilon_0 > 0$ şi un $p \in \mathbf{N}^*$ a.î. $|x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon_0$. Se constată însă imediat că pentru $p = n$ avem:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

2.5 Să se cerceteze natura următoarelor șiruri $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu termenii generali:

$$1) x_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \cdots + \frac{n+10}{2n+1}. \quad 2) x_n = \sin n.$$

R: 1) Șirul este divergent. Se observă că:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{n+11}{2n+3} + \cdots + \frac{2n+10}{4n+1} > \frac{2n+10}{4n+1} > \frac{1}{2}.$$

2) Presupunem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Atunci avem și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = x$, ceea ce implică:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\sin(n+1) - \sin(n-1)] = 0,$$

adică $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sin 1 \cos n = 0$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = 0$. Din $\sin 2n = 2 \sin n \cos n$ ar rezulta că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin 2n = 0$. Dar șirul $(\sin 2n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un subșir al șirului $(\sin n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, de unde se deduce că $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$. Așadar am avea: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^2 n + \cos^2 n) = 0$. Contradicție. Deci șirul (x_n) este divergent.

2.6 Folosind criteriul lui Cauchy, să se studieze natura șirurilor cu termenii generali:

$$1) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k!}{k(k+1)}. \quad 2) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{a^k}, \quad a > 1. \quad 3) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{3^k}.$$

2.7 Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$x_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \cdots + \alpha_k}{\beta_0 n^h + \beta_1 n^{h-1} + \cdots + \beta_h}, \quad \alpha_0, \beta_0 \neq 0, \quad k, h \in \mathbf{N}.$$

2.8 Să se calculeze limitele șirurilor:

$$1) x_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}. \quad 2) x_n = \frac{C_n^k}{n^k}. \quad 3) x_n = \frac{n}{2^n}.$$

2.9 Să se arate că dacă $|a| < 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$.

R: Deoarece $|a| < 1$, există $b > 0$ a.î. $|a| = \frac{1}{1+b}$ și se dezvoltă după binomul lui Newton.

2.10 Fie x_1, x_2, \dots, x_p numere reale pozitive. Să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_p^n} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_p\}.$$

R: Fie $x = \max\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Rezultă: $x^n \leq x_1^n + x_2^n + \cdots + x_p^n \leq px^n$, adică;

$$x \leq \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \cdots + x_p^n} \leq x \sqrt[p]{p}.$$

Dar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{p} = 1$.

2.11 Fie şirul cu termenul general:

$$x_n = a + n + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}.$$

- 1) Să se arate că (x_n) este convergent.
- 2) Să se găsească rangul de la care $|x_n - a| \leq 0,01$.

2.12 Să se calculeze limitele şirurilor (x_n) date prin termenii generali:

$$\begin{aligned} &1) x_n = \frac{\sqrt{5n^2 - 3n} + 2}{4n + 1}. \quad 2) x_n = \left(\frac{3n + 2}{3n + 5} \right)^n. \quad 3) x_n = \frac{2a^n + b^n}{3a^n + 4b^n}. \\ &4) x_n = \frac{2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2}. \quad 5) x_n = \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}. \\ &6) x_n = \sqrt{n+2\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+4\sqrt{n+1}}. \quad 7) x_n = \sqrt[3]{n^2 + n + 1} - an. \\ &8) x_n = \left(\frac{2n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2} \right)^{\frac{-6n}{3n+1}}. \quad 9) x_n = \left(\frac{n + \sqrt{n} + 1}{n + \sqrt[3]{n} + 2} \right)^n. \quad 10) x_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^2 - 9}. \\ &11) x_n = \frac{n(1^3 + 2^3 + \dots + n^3)}{(n+2)^5}. \quad 12) x_n = \sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt{n^4 - n^2 + 1}. \\ &13) x_n = n^k \left(\sqrt{\frac{n+2}{n+5}} - 1 \right). \quad 14) x_n = n^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right). \end{aligned}$$

2.13 Se consideră curba formată din semicercuri de raze $r, \frac{r}{3}, \frac{r}{9}, \frac{r}{27}, \dots$ cu centrele cercurilor coliniare. Să se calculeze lungimea L_n a liniei formate din primele n semicercuri, precum şi $L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$. care sunt valorile lui n pentru care diferenţa $L - L_n$ reprezintă cel mult 5% din L ?

R: Avem:

$$L_n = \pi \left(r + \frac{r}{3} + \frac{r}{3^2} + \dots + \frac{r}{3^{n-1}} \right) = \frac{3\pi r}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$\text{şi } L = \frac{3\pi r}{2}. \quad L - L_n = \frac{3\pi r}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \leq \frac{5}{100} \cdot \frac{3\pi r}{2}, \text{ de unde } 3^n \geq 20, \text{ adică } n \geq 3.$$

2.14 Să se discute după valorile parametrului real p :

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p \left[\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} \right].$$

R: Notăm

$$a_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} = \left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1 \right) + \left(1 - \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} \right).$$

Avem $a_n \rightarrow 0$, iar $na_n \rightarrow -\frac{1}{6}$. Deci:

$$\ell = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} = \begin{cases} 0, & p \in (-\infty, 1), \\ -\frac{1}{6}, & p = 1, \\ -\infty, & p \in (1, \infty). \end{cases}$$

2.15 Să se calculeze limita șirului (x_n) cu termenul general:

$$x_n = \frac{\sin 1 + a \sin 2 + \cdots + a^{n-1} \sin n}{a^n [1 + 2a + 3a^2 + \cdots + (n+1)a^n]}, \quad a > 1.$$

R: Din $|\sin x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deducem:

$$0 < |x_n| \leq \frac{(1-a)(1-a^n)}{a^n [1 - (n+2)a^{n+1} + (n+1)a^{n+2}]} = \alpha_n$$

și cum pentru $a > 1$, $\alpha_n \rightarrow 0$, rezultă că $x_n \rightarrow 0$.

2.16 Să se arate că șirul cu termenul general $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ este convergent. Limita sa este numărul e .

R: Folosim criteriul lui Cauchy:

$$\begin{aligned} x_{n+p} - x_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+p)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2) \cdots (n+p)} \right] \end{aligned}$$

de unde:

$$x_{n+p} - x_n < \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^p} \right] < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

pentru $n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

2.17 Să se arate că dacă $a_n \rightarrow a$, atunci $s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow a$.

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro.

2.18 Să se arate că dacă șirul de numere pozitive $b_n \rightarrow b$, atunci

$$p_n = \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \cdots \cdot b_n} \rightarrow b.$$

2.19 Fie $(a)_n$ un șir de numere pozitive. Să se arate că dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha.$$

R: Se ține seama de egalitatea $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}}$.

2.20 Să se calculeze:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}}. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

R: Se aplică exercițiul precedent. Se obține: 1) 1, 2) $\frac{4}{e}$, 3) $\frac{1}{e}$.

2.21 Să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \quad \forall p \in \mathbf{N}.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right] + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}.$$

$$\text{Dar } \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right] = p.$$

2.22 Să se determine limita șirului cu termenul general:

$$x_n = \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}, \quad p \in \mathbf{N}^*.$$

2.23 Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2!} + \sqrt[3]{3!} + \dots + \sqrt[n]{n!}}{n^2 \cdot a^n}, \quad a > 1.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{a^n [(n+1)^2 a - n^2]} = \frac{1}{a-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n^2 \cdot a^n} = 0.$$

2.24 Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (2!)^2 \cdot \sqrt{2} + (3!)^2 \cdot \sqrt[3]{3} + \dots + (n!)^2 \cdot \sqrt[n]{n}}{n! \cdot (n+1)! \cdot \sqrt{n}}.$$

R: Se aplică teorema lui Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \sqrt[n+1]{n+1}}{(n+1)(n+2)\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = 0.$$

2.25 Se dă șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu termenul general:

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+4)}.$$

- 1) Să se arate că șirul este mărginit și să se calculeze $\sup_{n \in \mathbf{N}} x_n$.
- 2) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{18}{11} \cdot x_n \right]^n$.

R: 1) Din identitatea

$$\frac{1}{(k+1)(k+4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4} \right), \quad k \in \mathbf{N},$$

deducem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4} \right) = \frac{11}{18}.$$

Din $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+2)(n+5)} > 0$ rezultă că șirul este crescător și deci $\sup_{n \in \mathbf{N}} x_n = \frac{11}{18}$.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{18}{11} \cdot x_n \right]^n = e^{-1}.$$

2.26 Să se determine limita următoarelor șiruri:

$$1) x_n = \frac{3}{1^3} + \frac{5}{1^3 + 2^3} + \dots + \frac{2n+1}{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}. \quad 2) x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$3) x_n = \frac{a^n + b^n + 3^n}{2^n + 5^n + n}, \quad a, b \geq 0. \quad 4) x_n = \frac{1}{7^n \cdot n!} \cdot \prod_{k=1}^n (k^2 + 3k + 9).$$

R: La 4) se ține seama de inegalitatea $k^2 + 3k + 9 \geq 3\sqrt[3]{27k^3} = 9k$.

2.27 Să se calculeze:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)! \cdot 8^n}}. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + k - 1}{(k+1)!}. \quad 3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!}.$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n} \cdot (n!)^3}{(3n)!}}. \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}. \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{k^2}{n^3}} - 1 \right].$$

R: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{16(2n+1)} = \frac{1}{32}$. 2) Din $\frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$ deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2+k-1}{(k+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right] = 2.$$

3) Din $\frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!} = \frac{2^{k-1}}{k!} - \frac{2^k}{(k+1)!}$ deducem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1}(k-1)}{(k+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{2^n}{(n+1)!} \right] = 1.$$

2.28 Să se calculeze limitele șirurilor cu termenii generali

$$\begin{aligned} 1) x_n &= \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}. \quad 2) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2+k}{n^3+k}. \quad 3) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2+k-1}{(k+1)!}. \\ 4) x_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) \cdot \frac{3 \cdot 2^n + (-1)^n}{2^n}. \quad 5) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}. \\ 6) x_n &= \frac{1}{n^2} \cdot \left(\sqrt{C_n^2} + \sqrt{C_{n+1}^2} + \cdots + C_{2n}^2 \right). \quad 7) x_n = \frac{1}{n^3} \cdot \left(\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 \right). \end{aligned}$$

2.29 Să se calculeze limitele șirurilor cu termenii generali:

$$\begin{aligned} 1) x_n &= \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2}. \quad 2) x_n = \left(1 + \frac{\sqrt[3]{n}+1}{2\sqrt{n}-3} \right)^{\alpha \sqrt[6]{n}-3}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \\ 3) x_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)! + k!}. \quad 4) x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(k+2)}{n^4}. \end{aligned}$$

2.30 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$x_n = ac + (a+ab)c^2 + (a+ab+ab^2)c^3 + \cdots + (a+ab+\cdots+ab^n)c^{n+1},$$

$a, b, c \in \mathbf{R}$, $|c| < 1$, $b \neq 1$, $|bc| < 1$.

R: Să observăm că se mai scrie

$$x_n = \frac{ac}{1-b} [(1+c+\cdots+c^n) - b(1+bc+\cdots+b^nc^n)].$$

Deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \left[\frac{1-c^{n+1}}{1-c} - b \cdot \frac{1-(bc)^{n+1}}{1-bc} \right] = \frac{ac}{(1-c)(1-bc)}.$$

2.31 Să se arate că:

$$0 < \ln [\ln (k+1)] - \ln (\ln k) < \frac{1}{k \ln k}, \quad \forall k \geq 2$$

și apoi să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}$.

R: Inegalitatea din stânga rezultă din faptul că funcția $\ln x$ este strict crescătoare. Fie $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln(\ln x)$. Pe fiecare interval $[k, k+1]$, $k \geq 2$, conform teoremei lui Lagrange, există $c_k \in (k, k+1)$ a.î.

$$\ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) = \frac{1}{c_k \ln c_k}.$$

Din $\ln k < \ln c_k < \ln(k+1)$ deducem:

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \frac{1}{c_k \ln c_k} < \frac{1}{k \ln k},$$

deci

$$0 < \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} < \ln[\ln(k+1)] - \ln(\ln k) < \frac{1}{k \ln k}.$$

Sumând pentru $k = \overline{2, n}$ rezultă că limita este ∞ .

2.32 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(n^2+1)(n^2+2^2) \cdots (2n^2)}{n^2}}.$$

R: Avem că $\ln x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)$, care este o sumă Riemann pentru funcția $f(x) = \ln(1+x^2)$ pe intervalul $[0, 1]$, pentru diviziunea $\Delta_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$, cu punctele intermediare $\xi_k = \frac{k}{n}$ și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

2.33 Să se calculeze limita șirului cu termenul general

$$x_n = \left[\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx \right]^{\frac{1}{n}}, \quad a < b.$$

R: Notăm $I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$. Integrând prin părți, obținem

$$I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot I_{m-1,n+1} = \frac{m}{n+1} \cdot \frac{m-1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+m+1} \cdot I_{0,n+m}.$$

Se obține de aici că $I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (b-a)^{2n+1}$, de unde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.

2.34 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right]$.

R: Deoarece $\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1}$. Din

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1},$$

sumând pentru $k = \overline{1, n}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \leq \left[\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right] \leq \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1},$$

deci şirul are limita $\frac{1}{2}$.

2.35 Fiind dată funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$, să se calculeze limita şirului cu termenul general

$$x_n = f^{(k)}(1) + f^{(k)}(2) + \dots + f^{(k)}(n),$$

unde $f^{(k)}$ este derivata de ordinul k a funcţiei f .

R: Deoarece $f(x)$ se poate scrie: $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$, rezultă că

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot \left[\frac{1}{(x+1)^{k+1}} - \frac{1}{(x+2)^{k+1}} \right],$$

şi deci

$$x_n = \left[-\frac{1}{(n+2)^{k+1}} \right] \rightarrow (-1)^k \cdot k! \cdot \frac{1}{2^{k+1}}.$$

2.36 Să se studieze natura şirului (x_n) definit prin: $x_1 = a \in [1, 2]$ şi $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, pentru $n \geq 1$.

2.37 Se dau numerele reale a_0, b_0, c_0 . Definim şirurile $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$ prin:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n), \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n), \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Să se arate că şirurile sunt convergente la $\frac{1}{3}(a_0 + b_0 + c_0)$.

R: Fie $x_n = a_n + b_n + c_n$. Adunând cele trei relaţii, obţinem: $x_{n+1} = x_n$, deci (x_n) este un şir constant: $x_n = x_0$. Din $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_{n-1} + x_0)$ rezultă că $a_n \rightarrow \frac{1}{3}x_0$ etc.

2.38 Fie $q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ si sirul (x_n) definit prin: $x_1 = q$, $x_2 = 1 + q$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

- 1) Să se arate că termenii șirului sunt în progresie geometrică.
- 2) Să se arate că are loc egalitatea

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_{n+2} & x_{n+1} & x_n \\ x_n & x_{n+2} & x_{n+1} \\ x_{n+1} & x_n & x_{n+2} \end{vmatrix} = 4 \cdot x_{3n+2}.$$

- 3) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

R: 1) Prin inducție matematică: $x_2 = 1 + q = q^2$, $x_3 = x_1 + x_2 = q^3$. Presupunem $x_n = q^n$. Din $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} = q^n + q^{n+1} = q^n(1 + q)$, rezultă $x_{n+2} = q^{n+2}$.

- 2) $\Delta_n = q^{3n}(q^6 - 2q^3 + 1) = 4q^{3n+2} = 4x_{3n+2}$. 3) Deoarece $|q| < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2.39 Să se calculeze limita șirului:

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, \quad a > 0.$$

2.40 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi} \right)^n, \quad a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{1 + x^2} dx, \quad n \geq 2.$$

R: Se obține: $a_n = 2n - 2 - 2 \operatorname{arctg} n + \frac{\pi}{2}$, iar limita este $e^{-\frac{4}{\pi}}$.

2.41 Fie $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ și $(B_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ două șiruri de numere raționale a.î.:

$$(a + b\sqrt{k})^n = A_n + B_n\sqrt{k}, \quad n \geq 1, \quad a, b \in \mathbf{Q}_+, \quad \sqrt{k} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n}$.

R: Din $A_n + B_n\sqrt{k} = (a + b\sqrt{k})^n$ și $A_n - B_n\sqrt{k} = (a - b\sqrt{k})^n$, urmează:

$$A_n = \frac{1}{2} \left[(a + b\sqrt{k})^n + (a - b\sqrt{k})^n \right], \quad B_n = \frac{1}{2\sqrt{k}} \left[(a + b\sqrt{k})^n - (a - b\sqrt{k})^n \right].$$

Așadar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \sqrt{k}$.

2.42 Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ și

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$.

R: Se găsește: $a_n = 3(2^n - 1)$ și $b_n = 2^n$.

2.43 Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.

R: Deoarece $\sin \alpha = \sin(\alpha - n\pi)$, urmează:

$$\sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n + 1} - n\pi) = \sin^2\left(\pi \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}\right)$$

și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$.

2.44 Să se calculeze limita șirului

$$x_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}, \quad n \geq 2.$$

R: Fie $a_n = \frac{(n+1)^n}{n!}$. Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow e$, rezultă că $\sqrt[n]{a_n} = e$.
Fie

$$b_n = \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

și $b_n^n = \left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{n}{n+1}} \rightarrow e$ și

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}\right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x_n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{\sqrt[n]{n!}}{x_n}}\right]^{x_n \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n},$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{e}$.

2.45 Să se determine mulțimea punctelor limită, limita inferioară și limita superioară pentru șirurile date prin:

$$1) x_n = \frac{1 + (-1)^n}{3} + (-1)^n \cdot \frac{2n}{3n+1}. \quad 2) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left[(-1)^n + \frac{1}{2}\right] + \cos \frac{n\pi}{2}.$$

R: 1) Deoarece $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{x_{2k}\}_{k \in \mathbf{N}} \cup \{x_{2k+1}\}_{k \in \mathbf{N}}$ și

$$x_{2k} = \frac{2}{3} + \frac{4k}{6k+1} \rightarrow \frac{4}{3}, \quad x_{2k+1} = -\frac{4k+2}{6k+4} \rightarrow -\frac{2}{3},$$

rezultă că $\mathcal{M} = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}$, $\liminf x_n = -\frac{2}{3}$, $\limsup x_n = \frac{4}{3}$.

2) Deoarece $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} = \{x_{4k}\}_{k \in \mathbf{N}} \cup \{x_{4k+1}\}_{k \in \mathbf{N}} \cup \{x_{4k+2}\}_{k \in \mathbf{N}} \cup \{x_{4k+3}\}_{k \in \mathbf{N}}$ și

$$\begin{aligned} x_{4k} &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{4k} + \cos 2k\pi \rightarrow \frac{3}{2}e + 1, \\ x_{4k+1} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4k+1}\right)^{4k+1} + \cos \frac{(4k+1)\pi}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}e, \\ x_{4k+2} &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2} + \cos \frac{(4k+2)\pi}{2} \rightarrow \frac{3}{2}e - 1, \\ x_{4k+3} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4k+3}\right)^{4k+3} + \cos \frac{(4k+3)\pi}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}e, \end{aligned}$$

rezultă că $\mathcal{M} = \left\{-\frac{1}{2}e, \frac{3}{2}e - 1, \frac{3}{2}e + 1\right\}$, $\liminf x_n = -\frac{1}{2}e$, $\limsup x_n = \frac{3}{2}e + 1$.

2.46 Să se determine mulțimea punctelor limită, limita inferioară și limita superioară pentru șirurile date prin:

$$1) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n \cdot (-1)^n} \cdot \frac{n}{2n+1} + \cos \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

$$2) x_n = 5 - 3(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$$3) x_n = \frac{1}{n} \cdot n^{(-1)^n} + \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

$$4) x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \cdot \frac{n-1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$$5) x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} - \cos \frac{n\pi}{3}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2.2 Principiul contracției

2.47 Să se arate că ecuația $x^3 + 4x - 1 = 0$ are o singură rădăcină reală și să se determine aproximațiile până la ordinul trei ale rădăcinii.

R: Se constată imediat că ecuația are o rădăcină pe intervalul $[0, 1]$. Scriind ecuația sub forma echivalentă $x = \frac{1}{x^2 + 4}$, problema revine la a arăta că aplicația $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$, este o contracție pe $[0, 1]$. Dar

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = \frac{|x + y|}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)} \cdot d(x, y) \leq \frac{1}{8} d(x, y).$$

Intr-adevăr, din $|x| \leq \frac{x^2+4}{4}$, deducem $|x+y| \leq |x|+|y| \leq \frac{1}{4}(x^2+4)(y^2+4)$. Deci φ este o contracție pe $[0, 1]$, cu $q = \frac{1}{8}$. Șirul aproximațiilor succesive:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + 4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ne dă $x_1 = 0,25$, $x_2 = 0,2461538$, $x_3 = 0,2462695$ etc.

2.48 *Să se arate că ecuația $x^3 + 12x - 1 = 0$ are o singură rădăcină reală și să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de 0,0001.*

R: Se constată imediat că ecuația are o rădăcină pe intervalul $[0, 1]$. Ca în exercițiul precedent, se arată că aplicația $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 12}$, este o contracție pe $[0, 1]$, cu $q = \frac{2}{169}$. Șirul aproximațiilor succesive este:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2 + 12}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estimarea erorii metodei este dată de

$$|x_n - \xi| < \frac{\delta}{1-q} q^n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

în care $\delta = |x_1 - x_0|$. În cazul nostru

$$|x_n - \xi| < \frac{1}{12} \frac{169}{167} \left(\frac{2}{169} \right)^n < 10^{-4}.$$

Se constată că este suficient să luăm $n = 2$. Avem: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{12} = 0,083333$, $x_2 = \frac{144}{1729} = 0,083285135$.

2.49 *Să se arate că ecuația $\sin x - 10x + 1 = 0$ are o singură rădăcină reală și să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de 0,001.*

R: Se constată imediat că ecuația are o rădăcină pe intervalul $[0, 1]$. Se constată că aplicația $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{10}(1 + \sin x)$, este o contracție pe $[0, 1]$, cu $q = \frac{1}{10}$. Șirul aproximațiilor succesive este:

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{10}(1 + \sin x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estimarea erorii

$$|x_n - \xi| < \frac{1}{10} \frac{9}{10} \left(\frac{1}{10} \right)^n < 10^{-3}.$$

Este suficient să luăm $n = 2$. Avem: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{10} = 0,1$, $x_2 = \frac{1}{10}(1 + \sin 0,1) = 0,10998$.

2.50 Să se arate că ecuația $x^5 + x^3 - 1,16 = 0$ are o singură rădăcină reală și să se calculeze această rădăcină cu o eroare mai mică de 0,001.

2.51 Fie $f : [a, b] \rightarrow [-c, c]$ o funcție derivabilă pe $[a, b]$ și a.î. $0 < m \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul $p \in (m, M)$ pentru ca funcția $\varphi(x) = x - \frac{1}{p}f(x)$, $x \in [a, b]$, să fie o contracție pe $[a, b]$ și deci ecuația $\varphi(x) = 0$ să aibă o singură soluție pe $[a, b]$?

R: Avem: $d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x - y| = |\varphi'(\xi)| \cdot d(x, y)$ și pentru ca φ să fie contracție este necesar să existe $q < 1$ a.î. $|\varphi'(\xi)| < q$. Însă $\varphi'(\xi) = 1 - \frac{1}{p}f'(x)$ și din $0 < m \leq f'(x) \leq M$ rezultă $1 - \frac{M}{p} \leq \varphi'(\xi) \leq 1 - \frac{m}{p} < 1$ (căci $p \in (m, M)$). Este deci necesar ca $-1 < 1 - \frac{M}{p}$, adică $p > \frac{M}{2}$. În concluzie, dacă $p \in (\max\{m, \frac{M}{2}\}, M)$, φ este o contracție pe $[a, b]$.

Putem generaliza exercițiul precedent, presupunând $p = p(x)$. Astfel, dacă alegem

$$p(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, \quad x \in [a, b],$$

se obține metoda coardei, iar dacă alegem $p(x) = f'(x)$ se ajunge la metoda lui Newton.

2.52 Ce condiție trebuie să îndeplinească funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, de două ori derivabilă pe $[a, b]$ pentru ca funcția $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ să fie o contracție pe $[a, b]$?

R: Deoarece $d(\varphi(x), \varphi(y)) = |\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| \cdot d(x, y)$, condiția $|\varphi'(\xi)| \leq q < 1$ conduce la: $|f(x) \cdot f''(x)| \leq q \cdot f'^2(x)$, $0 < q < 1$.

2.53 Să se calculeze aproximativ $\sqrt[p]{a}$, $a > 0$ și $p = 2, 3, \dots$

R: Luăm $f(x) = x^p - a$. Atunci $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{p}[(p-1)x + ax^{1-p}]$. Cum $\varphi'(x) = \frac{p-1}{p}(1 - ax^{-p}) < \frac{p-1}{p}$, pentru $x > 0$, rezultă că φ este o contracție și deci putem lua

$$\sqrt[p]{a} \approx x_{n+1} = \frac{1}{p}[(p-1)x_n + ax_n^{1-p}].$$

2.3 Șiruri în \mathbf{R}^p

2.54 Să se calculeze limitele următoarelor șiruri din \mathbf{R}^3 :

$$1) \mathbf{x}_n = \left(\frac{2n}{3n-1}, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}, \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \right).$$

$$2) \mathbf{x}_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}, \sqrt[n]{n^2}, e^{\frac{1}{n}} \right).$$

2.55 În \mathbf{R}^4 se consideră şirul (\mathbf{x}_n) definit prin relaţia de recurenţă:

$$6\mathbf{x}_{n+3} = 11\mathbf{x}_{n+2} - 6\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_n, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

cu $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 0)$, $\mathbf{x}_1 = (1, 9, 3, 6)$, $\mathbf{x}_2 = (1, 9, 7, 8)$. Să se determine \mathbf{x}_n şi să se calculeze limita şirului.

R: Se caută $\mathbf{x}_n = \lambda^n \mathbf{a}$, cu $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^4$. Se obţine pentru λ ecuaţia caracteristică $6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$, cu rădăcinile: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Deci \mathbf{x}_n este de forma: $\mathbf{x}_n = \mathbf{a} + \frac{1}{2^n} \mathbf{b} + \frac{1}{3^n} \mathbf{c}$. Se obţine limita $\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 9\right)$.

2.4 Serii de numere reale

2.56 Să se arate că seria

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

este convergentă şi $s = 1$.

R: În adevăr,

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

2.57 Seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

se numeşte seria armonică, deoarece pentru $n \geq 2$, a_n este media armonică a termenilor vecini a_{n-1} şi a_{n+1} . Să se arate că seria este divergentă şi are suma $+\infty$.

R: Şirul (s_n) al sumelor parţiale este strict crescător şi divergent, deoarece

$$|s_{2n} - s_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

ceea ce arată că (s_n) nu este şir fundamental. Deci $\lim s_n = +\infty$.

2.58 Să se arate că seria

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

este divergentă.

R: Este o serie oscilantă deoarece şirul (s_n) al sumelor parţiale este şirul oscilant: $1, 0, 1, 0, \dots$

2.59 *Seria*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}, \quad q \in \mathbf{R}$$

se numește seria geometrică deoarece șirul (a_n) , $a_n = q^{n-1}$, este o progresie geometrică cu rația q . Să se studieze natura acestei serii după valorile lui q .

R: Șirul sumelor parțiale are termenul general

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1, \\ n, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{dacă } |q| \geq 1. \end{cases}$$

Pentru $q \leq 1$ șirul (s_n) nu are limită. Astfel, seria geometrică cu rația q este convergentă pentru $|q| < 1$ și are suma $\frac{1}{1-q}$ și divergentă pentru $|q| \geq 1$.

2.60 Să se stabilească natura seriilor următoare și în caz de convergență să se determine sumele lor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+\alpha+1} - 2\sqrt{n+\alpha} + \sqrt{n+\alpha-1}), \quad \alpha > 0.$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \quad \alpha \in \mathbf{Z}_-.$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\alpha^n}, \quad \alpha > 1. \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15n^2 - 8n - 3}.$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}. \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+2)!}. \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5 + (-1)^n]^n}.$$

R: 1) Notăm cu $a_n = \sqrt{n+\alpha} - \sqrt{n+\alpha-1}$. Se observă că $s_n = a_{n+1} - a_n$. Se obține suma $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha+1}$.

2) Folosind identitatea:

$$\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1},$$

se obține $s_n = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1}$. Seria este convergentă și are suma $\frac{1}{\alpha+1}$.

3) Pentru a evalua suma parțială de ordinul n plecăm de la identitatea:

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{x^2}{\alpha^2} + \cdots + \frac{x^n}{\alpha^n} = \frac{1}{\alpha^n} \cdot \frac{x^{n+1} - x\alpha^n}{x - \alpha}.$$

Derivând în raport cu x , avem:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{2x}{\alpha^2} + \cdots + \frac{nx^{n-1}}{\alpha^n} = \frac{nx^{n+1} - \alpha(n+1)x^n + \alpha^{n+1}}{\alpha^n (x - \alpha)^2}.$$

De aici, pentru $x = 1$, obținem

$$s_n = \frac{n - \alpha(n+1) + \alpha^{n+1}}{\alpha^n (1 - \alpha)^2}.$$

Seria este convergentă și are suma $\frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}$.

4) Termenul general al șirului sumelor parțiale se descompune în fracții simple astfel:

$$\frac{1}{16k^2 - 8k - 3} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k - 3} - \frac{1}{4k + 1} \right).$$

Folosind această identitate se obține $s_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n + 1} \right)$. Seria este convergentă și are suma $\frac{1}{4}$.

5) Șirul sumelor parțiale al acestei serii

$$s_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} = \ln(n+1)$$

are limita ∞ , deci seria este divergentă.

6) Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, seria este divergentă.

7) Fie $b_n = \frac{2^n}{(n+2)!}$. Atunci termenul general al seriei se scrie $a_n = n \cdot b_n$, iar $(n+2)b_n = 2b_{n-1}$. Deci

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n kb_k = 2(b_0 - b_n) = 1 - 2b_n.$$

Dar $b_n \rightarrow 0$ deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+2)!}$ este convergentă. Rezultă că seria este convergentă și are suma 1.

8) Se observă că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{[5 + (-1)^n]^n} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots \right) = \frac{19}{24}.$$

2.61 Să se arate că următoarele serii sunt convergente și să se determine sumele lor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{5^n}. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

R: 1) Serie geometrică cu rația $\frac{1}{3}$ și suma $\frac{1}{4}$. 2) Serie geometrică cu suma $\frac{5}{6}$. 3) Serie telescopică cu suma $\frac{1}{2}$.

2.62 Să se calculeze sumele următoarelor serii, știind că termenii șirului (a_n) formează o progresie aritmetică cu $a_1 > 0$ și rația $r > 0$:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2}.$$

R: 1) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right).$$

Se obține o serie telescopică.

2) și 3) Analog, avem:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right),$$

$$\frac{a_n + a_{n+1}}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right).$$

2.63 Să se arate că:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{1}{4} (x - \sin x). \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2 \operatorname{ctg} 2x - \frac{1}{x}.$$

R: 1) Multiplicăm identitatea $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ cu 3^{n-1} și luăm $\theta = \frac{x}{3^n}$. Obținem:

$$3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{x}{3^n} - 3^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}} \right).$$

Punem $a_n = \frac{3^{n-1}}{4} \sin \frac{x}{3^{n-1}}$. Atunci $s_n = a_{n+1} - a_1$ și

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4} (x - \sin x).$$

2) Multiplicăm identitatea $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \theta - 2 \operatorname{ctg} 2\theta$ cu 2^n și luăm $\theta = 2^n x$. Obținem:

$$2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2^n \operatorname{ctg} 2^n x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x.$$

2.64 Să se calculeze suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}.$$

R: Din

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \text{ și } \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}},$$

rezultă că $a_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$ și deci $s_n = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$.

2.65 Să se arate că:

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1.$$

R: Seria

$$\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

este convergentă pentru orice $p \geq 2$, deci

$$\sum_{p=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

Dar

$$\sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

și

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$

2.66 Să se arate că următoarele serii sunt divergente:

$$\begin{aligned} & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}. \\ & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}. \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}. \end{aligned}$$

2.67 Să se studieze natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(1 + a^{n-1}b)(1 + a^n b)}, \quad a, b \in \mathbf{R}_+^*.$$

R: Deoarece termenul general al seriei se poate scrie, pentru $a \neq 1$:

$$a_n = \frac{1}{1-a} \frac{a^{n-1} - a^n}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)} = \frac{1}{b(1-a)} \frac{(1+a^{n-1}b) - (1+a^nb)}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)},$$

adică

$$a_n = \frac{1}{b(1-a)} \left(\frac{1}{1+a^nb} - \frac{1}{1+a^{n-1}b} \right) \text{ și } s_n = \frac{1}{b(1-a)} \left(\frac{1}{1+a^nb} - \frac{1}{1+b} \right).$$

Deci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}b)(1+a^nb)} = \begin{cases} \frac{1}{b(a-1)(b+1)}, & a \in (1, \infty), \\ \infty, & a = 1, \\ \frac{1}{(1-a)(1+b)}, & a \in (0, 1). \end{cases}$$

2.5 Serii cu termeni pozitivi

2.68 Fie (a_n) un șir de numere pozitive. Să se arate că seria $\sum a_n$ este convergentă d.d. seria $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă.

R: Deoarece $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, dacă seria $\sum a_n$ este convergentă atunci și seria $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă.

Dacă seria $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ este convergentă, atunci $\frac{a_n}{1+a_n} \rightarrow 0$, deci $a_n \rightarrow 0$. Deci pentru n suficient de mare, $0 \leq a_n \leq 1$. Atunci $\frac{1}{2}a_n \leq \frac{a_n}{1+a_n}$. Deci seria $\sum a_n$ este convergentă.

2.69 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, numită seria lui Riemann sau seria armonică generalizată este:

- convergentă pentru $\alpha > 1$;
- divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

R: Intr-adevăr, dacă $\alpha \leq 0$, seria este divergentă deoarece șirul termenilor ei nu converge la zero.

Dacă $\alpha > 0$, șirul cu termenul general $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ este descrescător și deci seria lui Riemann are aceeași natură cu seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}} \right)^n,$$

care este o serie geometrică cu rația $q = 2^{1-\alpha} > 0$, convergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} < 1$, adică $\alpha > 1$, și divergentă dacă $q = 2^{1-\alpha} \geq 1$, adică $\alpha \leq 1$.

2.70 Să se arate că seria cu termenul general $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$ este convergentă.

R: Avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

2.71 Să se arate că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ este convergentă.

R: Intr-adevăr:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1, \quad n \geq 1.$$

Suma acestei serii este $e = 2,7182818 \dots$

2.72 Să se arate că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ este convergentă și să se precizeze numărul de termeni necesar pentru a obține suma seriei cu o eroare mai mică de 0,001.

R: Aplicăm criteriul raportului cu limită

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+2} = 0 < 1,$$

deci seria este convergentă. Deoarece $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{1}{3}$, pentru $n \geq 4$, restul de ordinul n

$$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq a_n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

pentru $n \geq 9$.

2.73 Să se stabilească natura seriei:

$$\frac{1}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} + \dots$$

R: Deoarece $\sqrt[n]{\ln n} < \sqrt[n]{n}$, pentru $n \geq 2$, avem că $\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. Dar seria $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ este divergentă.

2.74 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2 + 3n + 5}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + n}, \quad a > -1.$$

R: 1) Seria este convergentă. 2) Se aplică criteriul comparației cu limită. Se compară cu seria $\sum \frac{1}{n}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, seria este divergentă. 3) Pentru $a > 1$, cum $\frac{1}{a^n + n} < \frac{1}{a^n}$, seria este convergentă. Pentru $a = 1$ seria dată este seria armonică. Pentru $|a| < 1$ se aplică criteriul comparației cu limită. Se compară cu seria armonică. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n + n} = 1$, seria este divergentă.

2.75 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+\dots+a^n)} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad a > 0.$$

R: 1) Pentru $a \geq 1$, $1+a+a^2+\dots+a^n \geq n+1 > n$. Rezultă că

$$\frac{1}{n(1+a+a^2+\dots+a^n)} < \frac{1}{n^2}$$

și deci seria este convergentă.

Pentru $0 < a < 1$ se aplică criteriul comparației cu limită. Se compară cu seria armonică. Deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+a+a^2+\dots+a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a}{1-a^{n+1}} = 1-a,$$

seria dată este divergentă.

2) Deoarece $\sqrt[n]{n!} \geq 1$, avem că $\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \leq a^n$. De aici, pentru $a < 1$, deducem că seria este convergentă.

Din $\sqrt[n]{n!} \leq \sqrt[n]{n^n} = n$, obținem că $\frac{a^n}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{a^n}{n}$. Dar, pentru $a \geq 1$, seria $\sum \frac{a^n}{n}$ este divergentă. Rezultă că seria dată este divergentă.

2.76 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{n} \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Seriile sunt convergente.

2.77 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(a \frac{n^2+n+1}{n^2} \right)^n \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Pentru $a < 1$ seriile sunt convergente, pentru $a > 1$, seriile sunt divergente. Pentru $a = 1$, șirurile termenilor au limita e , deci seriile sunt divergente.

2.78 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}, \quad a > 0.$$

R: Se aplică criteriul rădăcinii cu limită. Pentru $a < \frac{1}{e}$ seria este convergentă, pentru $a > \frac{1}{e}$, seria este divergentă. Pentru $a = \frac{1}{e}$, seria devine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Din $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, obținem:

$$\frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} > \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

de unde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} > 0.$$

Rezultă că seria dată este divergentă.

2.79 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$\begin{aligned} &1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{\pi}{2^n}. \\ &3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}. \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. Seriile sunt convergente.

2.80 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (4n+1)}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. 1) Serie divergentă. 2) Serie convergentă.

2.81 *Să se stabilească natura seriilor:*

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}, \quad a > 0.$$

R: 1) Se aplică criteriul raportului cu limită. Seria este convergentă. 2) Criteriul raportului dă dubiu. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Se obține $\lambda = -\ln a$. Seria este convergentă pentru $a < \frac{1}{e}$ și divergentă pentru $a > \frac{1}{e}$. Pentru $a = \frac{1}{e}$ se obține seria armonică, deci divergentă.

2.82 Să se studieze natura seriei cu termenul general a_n definit astfel: $a_1 \in (0, 1)$, $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1$, pentru $n \geq 1$.

R: Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - x - 1$. Deoarece $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 1$ și $f'(x) = 0$ pentru $x_0 = -\ln(\ln 2)$, avem tabloul de variație:

x	0	$-\ln(\ln 2)$		1
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	0	\searrow	m	\nearrow

Deci $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (0, 1)$, de unde $2^x < x + 1$, $\forall x \in (0, 1)$.

Arătăm, prin inducție, că $a_n \in (0, 1)$. Avem că $a_1 \in (0, 1)$. Presupunem că $a_n \in (0, 1)$. Dar $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 > 2^0 - 1 = 0$ și $a_{n+1} = 2^{a_n} - 1 < 2^1 - 1 = 1$. Apoi: $a_{n+1} - a_n = 2^{a_n} - a_n - 1 < 0$, deci este un șir descrescător și mărginit. Fie $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Rezultă că $2^\ell - \ell - 1 = 0$, cu rădăcinile 0 și 1. Deoarece (a_n) este descrescător, urmează că $\ell = 0$. Putem deci scrie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{a_n} - 1}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2 < 1$$

și conform criteriului raportului seria este convergentă.

2.83 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \left[\frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+n+1)} \right]^2, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-.$$

R: Criteriul raportului dă dubiu. Aplicăm criteriul lui Raabe-Duhamel. Deoarece $\lambda = 4\alpha + 3$, dacă $\alpha > -\frac{1}{2}$ seria este convergentă, dacă $\alpha < -\frac{1}{2}$ seria este divergentă, dacă $\alpha = -\frac{1}{2}$ seria devine:

$$4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

care este divergentă.

2.84 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot 9^2 \cdots (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdots (4n-1)^2}.$$

R: Criteriul raportului și criteriul lui Raabe-Duhamel dau dubiu. Aplicăm criteriul lui Bertrand:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \cdot \ln n = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{16n^2 + 8n + 1} = 0 < 1,$$

deci seria este divergentă.

2.85 Să se stabilească natura seriilor:

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot (n!)^2} \cdot 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \\
 & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \lg \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot 4) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n + \beta}{\gamma n + \delta} \right)^n, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0. \\
 & 5) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n} \cdot 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n) \ln(\ln n)}.
 \end{aligned}$$

2.86 Să se stabilească natura seriilor:

$$\begin{aligned}
 & 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n^p}{(q+1)(q+2) \dots (q+n)}, \quad p, q \in \mathbf{N}. \\
 & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}, \quad \alpha > 0. \\
 & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha n) \cdot \ln n}{\sqrt{n}}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \\
 & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(2\alpha+1) \dots (n\alpha+1)}{(\beta+1)(2\beta+1) \dots (n\beta+1)}, \quad \alpha, \beta > 0.
 \end{aligned}$$

2.87 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)b(b+1) \dots (b+n-1)}{c(c+1) \dots (c+n-1)},$$

cu $a, b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, numită seria hipergeometrică.

R: Incepând de la un rang N care depinde de a , b și c , termenii seriei au același semn și deci putem presupune că seria este cu termeni pozitivi. Avem:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1+c-a-b}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

cu

$$\theta_n = \frac{[c-ab-(a+b)(1+c-a-b)]n^3 - ab(1+c-a-b)n^2}{n(n+a)(n+b)}.$$

Șirul (θ_n) este convergent, deci mărginit. Conform criteriului lui Gauss, pentru $c > a+b$ seria este convergentă, iar pentru $c \leq a+b$ seria este divergentă.

2.88 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1) \dots (\beta+n-1)} \cdot x^n, \quad \alpha, \beta, x > 0.$$

R: Se aplică criteriul raportului cu limită. Pentru $x \in (0, 1)$ seria este convergentă, pentru $x \in (1, \infty)$ seria este divergentă. Pentru $x = 1$ seria este convergentă dacă $b > a + 1$ și divergentă dacă $b \leq a + 1$.

2.89 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot b^n}{(b + a_1)(2b + a_2) \cdots (nb + a_n)},$$

unde $b > 0$, iar (a_n) este un șir de numere reale pozitive, convergent către a cu $a \neq b$.

2.6 Serii cu termeni oarecare

2.90 Să se arate că dacă $\sum a_n^2$ este o serie convergentă, atunci seria $\sum \frac{a_n}{n}$ este absolut convergentă.

R: Din $\left[|a_n| - \frac{1}{n}\right]^2 \geq 0$ deducem că $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. Deoarece $\sum a_n^2$ și $\sum \frac{1}{n^2}$ sunt convergente, conform primului criteriu de comparație rezultă că seria $\sum \frac{|a_n|}{n}$ este convergentă.

2.91 Să se arate că seria $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 0$.

R: Pentru $\alpha > 0$, șirul $\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}$ este monoton descrescător la zero, iar

$$s_n = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2},$$

pentru $x \neq 2k\pi$, cu k număr întreg. De unde,

$$|s_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

adică (s_n) este mărginit.

2.92 Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^2 + n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R: Pentru $\forall x \in \mathbf{R}$, șirul $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{x^2 + n}}$ este monoton descrescător la zero, iar

$$s_n = \sum_{k=1}^n \cos \frac{2n\pi}{3} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{(n+1)\pi}{3},$$

cu $|s_n| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, deci mărginit. Seria este convergentă.

2.93 Să se arate că seria armonică alternată

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

este convergentă și să se determine suma sa.

R: Șirul $(\frac{1}{n})$ este monoton descrescător la zero. După criteriul lui Leibniz seria este convergentă. Pentru calculul sumei folosim *identitatea lui Catalan-Botez*:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

care, dacă notăm $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, revine la: $a_{2n} - 2\left(\frac{a_n}{2}\right) = a_{2n} - a_n$. Rezultă că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

2.94 Să se arate că seria armonică generalizată (sau seria lui Riemann) alternată

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^\alpha}$$

în care $0 < \alpha \leq 1$ este simplu convergentă.

R: Șirul $(\frac{1}{n^\alpha})$ cu $\alpha > 0$ este monoton descrescător la zero. După criteriul lui Leibniz seria este convergentă. Pentru $\alpha > 1$ seria este absolut convergentă. În concluzie, pentru $0 < \alpha \leq 1$ seria lui Riemann alternată este simplu convergentă.

2.95 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctg \frac{1}{n}.$$

R: Serii alternate convergente.

2.96 Să se stabilească natura seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\pi \sqrt{n^2 + 1} \right). \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

R: 1) $a_n = \sin \left[(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n) + n\pi \right] = (-1)^n \sin (\pi \sqrt{n^2 + 1} - n)$ și se aplică criteriul lui Leibniz.

2) Deoarece $\frac{|\cos n\alpha|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$, seria este absolut convergentă.

2.97 Să se stabilească natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\sin n\theta}{n}.$$

2.98 Să se studieze convergența absolută și semiconvergența seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n+1}.$$

R: Pentru studiul absolutei convergențe folosim criteriul rădăcinii. Avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sin^2 x}{\sqrt[n]{n+1}} = 2 \sin^2 x.$$

Pentru $2 \sin^2 x < 1$ seria este absolut convergentă și deci convergentă. Pentru $2 \sin^2 x = 1$ obținem seria armonică alternată care este simplu convergentă. Pentru $2 \sin^2 x > 1$, termenul general al seriei nu tinde la 0, deci seria este divergentă.

2.99 Să se efectueze produsul în sens Cauchy al seriilor absolut convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$$

și să se deducă de aici suma ultimei serii.

R: Seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ are termenul general $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, adică $c_0 = 1$, iar, pentru $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_n &= 1 \cdot \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{1}{1!} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots - \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{1!} + \frac{1}{n!} \cdot 1 = \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[1 - \frac{n}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1!} + (-1)^n \right] = \frac{(-1)^n}{n!} (1-1)^n = 0. \end{aligned}$$

Deci seria produs are suma egală cu 1. Cum $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, după teorema lui Mertens, rezultă că $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{e}$.

2.100 Să se efectueze produsul în sens Cauchy al seriilor

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ și } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

R: Ambele serii sunt divergente deoarece termenii lor generali nu tind la zero. Seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ are termenul general

$$\begin{aligned} c_n &= 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot 1 = \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left[2^n - (2^{n-1} + \cdots + 2) + \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^2}\right) - \frac{3}{2}\right] = \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

Se observă că seria produs este convergentă, fiind seria geometrică cu rația $q = \frac{3}{4} < 1$. Rezultă de aici că ipotezele teoremei lui Mertens sunt suficiente dar nu și necesare.

Capitolul 3

Limite de funcții

3.1 Limita unei funcții reale de o variabilă reală

3.1 Să se calculeze:

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}. \\ & 3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25}. \quad 4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}. \\ & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}. \end{aligned}$$

3.2 Să se calculeze:

$$\begin{aligned} & 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}. \\ & 3) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}. \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x. \\ & 5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}. \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

3.3 Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

nu tinde către infinit când $x \rightarrow 0$.

R: Pentru șirul $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \rightarrow 0$, $f(x_n) = 0$ și deci tinde la 0.

3.4 Să se arate că funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sin x$, nu are limită pentru $x \rightarrow \infty$.

3.5 Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ a.î. funcția $f : (0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln(ex) + x^2}, & x \in (0, 1), \\ \alpha + \frac{x}{e}, & x \in [1, 2], \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

3.6 Să se arate că:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0. \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0, \quad k \in \mathbf{N}^*.$$

3.7 Să se cerceteze dacă funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = [x]$, are limită în punctul $x = 2$.

3.8 Să se calculeze:

- $$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x+1}. \quad & 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2 \sin^2 x)^{\frac{3}{x^2}}. \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin 2x)}{\sin 3x}. \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\sin 2x - \sin x}. \quad & 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}. \\ 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 9}}{x^2 + x - 6}. \quad & 7) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt[3]{x+22}}{\sqrt[4]{x+11} - 2}. \\ 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}. \quad & 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}. \\ 10) \lim_{x \nearrow 1} \frac{\left(\arcsin x - \frac{\pi}{2} \right)^2}{1-x^2}. \quad & 11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right). \quad 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{x+1}{x} \right). \\ 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}. \quad & 14) \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x) + \dots + \ln(1+nx)] \frac{1}{x}. \\ 15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{p_1^{\alpha_1 x} + p_2^{\alpha_2 x} + \dots + p_n^{\alpha_n x}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad & p_i > 0, \alpha_i \in \mathbf{R}. \\ 16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\sin x} + b^{\operatorname{tg} x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad & \text{cu } a, b > 0. \end{aligned}$$
- R:** 1) e . 2) e^6 . 3) $\frac{2}{3}$. 4) 1. 5) $-\frac{1}{3}$. 6) $-\frac{7}{30}$. 7) $\frac{112}{27}$. 8) $\frac{1}{2}$. 9) $\frac{1}{2}$. 10) 1.
 11) $\frac{2}{3}$. 12) Se ia $x = \frac{1}{y}$, $y \rightarrow 0$, limita este $\frac{1}{2}$. 13) 3. 14) $e^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
 15) $\sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}}$. 16) \sqrt{ab} .

3.9 Să se determine parametrul real α a.î.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1 - ax} \right),$$

să fie finită și nenulă.

R: Adunăm și scădem x . Se obține $a = 2$ și limita egală cu $\frac{5}{6}$.

3.10 Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ a.î.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{5x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 4x - ax^2 - bx - c} \right) = 0.$$

$$\mathbf{R}: a = \sqrt{5}, b = \frac{7}{2\sqrt{5}}, c = -\frac{209}{40\sqrt{5}}.$$

3.11 Să se calculeze:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}, \quad n \geq 2. \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^n - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}}. \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

R: 1) Se ține seama că $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ și se obține limita 2. 2) Notăm

$$a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos nx}{x^2}.$$

Avem că $a_1 = \frac{1}{2}$ și $a_n = a_{n-1} + \frac{n^2}{2}$. Se obține $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. 3) Funcția se mai scrie

$$\frac{\sin x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \frac{\sin x^n - x^n}{x^{n+2}} + \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}.$$

Se obține limita $\frac{n}{6}$. 4) Funcția se mai scrie

$$\frac{\operatorname{tg} x^n - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}} = \frac{\operatorname{tg} x^n - x^n}{x^{n+1}} + \frac{x^n - \ln^n(1+x)}{x^{n+1}}.$$

Se obține limita $\frac{n}{2}$. 5) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3.12 Să se calculeze:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} - \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x}}{\ln(\operatorname{tg} x - \cos 2x)}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right).$$

R: 1) $\frac{\sqrt[3]{2}}{6}$. 2) Putem scrie

$$x^2 \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{x+1}} \right) = \frac{x^2}{x(x+1)} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}}.$$

3.2 Limita unei funcții de o variabilă vectorială

3.13 Să se găsească și să se reprezinte grafic mulțimile de definiție ale următoarelor funcții de două variabile:

$$1) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad 2) f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}.$$

$$3) f(x, y) = \ln(x + y). \quad 4) f(x, y) = x + \arccos y.$$

$$5) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}. \quad 6) f(x, y) = \arcsin \frac{y}{x}.$$

$$7) f(x, y) = \sqrt{y \sin x}. \quad 8) f(x, y) = \ln(x^2 + y).$$

$$9) f(x, y) = \arctg \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}. \quad 10) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}.$$

$$11) f(x, y) = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{y}. \quad 12) f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

3.14 Să se găsească mulțimile de definiție ale următoarelor funcții de trei variabile:

$$1) f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}. \quad 2) f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$$

$$3) f(x, y, z) = \ln(xyz). \quad 4) f(x, y, z) = (xy)^z. \quad 5) f(x, y, z) = z^{xy}.$$

$$6) f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}. \quad 7) f(x, y, z) = \ln(-x^2 - y^2 + z^2 - 1).$$

3.15 Se dă funcția $f : E \rightarrow \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^2$. Să se arate că:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell$$

d.d. pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$, a.î. pentru orice $(x, y) \in E$ pentru care

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad |y - y_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{să avem} \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

R: Afirmatia rezultă din dubla inegalitate:

$$\max(|x - x_0|, |y - y_0|) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq (|x - x_0| + |y - y_0|).$$

3.16 Folosind definiția, să se demonstreze că:

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (2x + 3y) = 16. \quad 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-3)} (4x + 2y) = 2. \quad 3) \lim_{(x,y) \rightarrow (5,\infty)} \frac{xy}{y+1} = 1.$$

$$4) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x}{y} = 1. \quad 5) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (-1,2,0)} (2x + 3y - 2z) = 4.$$

R: 1) Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta(\varepsilon) > 0$, a.i. pentru orice $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ pentru care

$$|x - 2| < \delta(\varepsilon), \quad |y - 4| < \delta(\varepsilon) \quad \text{să avem} \quad |(2x + 3y) - 16| < \varepsilon.$$

Intr-adevăr,

$$|(2x + 3y) - 16| = |2(x - 2) + 3(y - 4)| \leq 2|x - 2| + 3|y - 4|.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Luăm $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{6}$. Atunci pentru $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$ și $|y - 4| < \delta(\varepsilon)$

$$|(2x + 2y) - 16| < 2\frac{\varepsilon}{6} + 3\frac{\varepsilon}{6} = \frac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon.$$

2) Este suficient să luăm $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{7}$. 3) $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{7}$.

3.17 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y},$$

definită pentru $x \neq y$, nu are limită în origine.

R: Vom arăta că pentru șiruri diferite convergente la $\mathbf{0}$, obținem limite diferite. Fie $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Observăm că punctele \mathbf{x}_n sunt situate pe dreapta $y = 2x$ și $\lim f(\mathbf{x}_n) = -3$. Fie apoi $\mathbf{x}'_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$. Punctele \mathbf{x}'_n sunt situate pe dreapta $y = -x$ și $\lim f(\mathbf{x}'_n) = 0$.

3.18 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x},$$

definită pentru $y^2 \neq 2x$, nu are limită în origine.

R: Vom arăta că pentru șiruri diferite convergente la $\mathbf{0}$, obținem limite diferite. Fie $\mathbf{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Observăm că punctele \mathbf{x}_n sunt situate pe parabola $y^2 = x$ și $\lim f(\mathbf{x}_n) = -3$. Fie apoi $\mathbf{x}'_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$. Punctele \mathbf{x}'_n sunt situate pe parabola $y^2 = 4x$ și $\lim f(\mathbf{x}'_n) = 3$.

3.19 Să se demonstreze că

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0.$$

R: Se ține seama de inegalitățile:

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} < \frac{x^2 + y^2 + 2|x||y|}{|x| + |y|} < |x| + |y|.$$

3.20 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

definită pentru $x \neq 0$ și $y \neq 0$, are limitele iterate în origine egale cu zero, însă nu are limită în origine.

R: În adevăr,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0.$$

Însă pe parabola $x^2 = my$, avem

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{my^2}{(m^2 + 1)y^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Pentru diferite valori ale lui m se obțin valori diferite ale limitei, deci f nu are limită în origine.

3.21 Să se cerceteze existența limitelor iterate și a limitei în origine pentru următoarele funcții:

- 1) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. 2) $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \cos \frac{1}{x}$.
- 3) $f(x, y) = \frac{2x - 3y + x^2 + y^2}{x + y}$. 4) $f(x, y) = \frac{2xy^2}{2x^2 + 5y^4}$.
- 5) $f(x, y) = \frac{y^2 - 2x}{y^2 + 2x}$. 6) $f(x, y) = \frac{x - y + 2x^2 + y^2}{x + y}$. 7) $f(x, y) = x \cos \frac{1}{y}$.
- 8) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, 9) $f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$,
- 10) $f(x, y) = \frac{(x + y) \operatorname{tg}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 11) $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^3 + y^3 + z^3}$.
- 12) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$. 13) $f(x, y) = (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$.
- 14) $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 y^2 (x^2 + y^2)}$.

R: 1) Există limitele iterate și sunt egale cu 0, dar nu există limita în origine. 2) Nu există limitele iterate, deoarece $\sin \frac{1}{y}$ nu are limită pentru $y \rightarrow 0$ și $\cos \frac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \rightarrow 0$. Funcția are însă limită în origine, deoarece

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{y} \right| + |y| \cdot \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \rightarrow 0.$$

3) Există limitele iterate:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 2.$$

Dacă limitele iterate există, sunt finite și distincte nu există limita în punct. 8) Se ține seama că

$$-|x + y| \leq |f(x, y)| \leq |x + y|.$$

9) Funcția se mai scrie

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2},$$

iar

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} < 2(|x| + |y|).$$

3.22 Să se calculeze

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}}.$$

R: Fie (x, y) în interiorul discului cu centrul în punctul $(1, 0)$ și de rază r . Obținem $x = 1 + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Deci

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + r \cos \theta + e^{r \sin \theta})}{r} = \infty.$$

3.23 Să se calculeze

$$1) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}. \quad 2) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x}.$$

R: 1) Suntem în cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Raționalizăm numitorul. Avem

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\sqrt{xy + 1} + 1 \right) = 2.$$

2) Avem

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = 2.$$

3.24 *Să se calculeze*

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}. \quad 2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y}.$$

$$3) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, k)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x. \quad 4) \lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x+y}{x^2 + y^2}.$$

R: 1) Deoarece $\left| (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| \leq x^2 + y^2$, limita este 0. 2) Funcția nu are limită. De exemplu, pe dreapta $y = mx$ se obține o limită ce depinde de m . 3) Limita este e^k . 4) Putem presupune $x + y > 1$. Limita este 0.

Capitolul 4

Funcții continue

4.1 Continuitatea funcțiilor reale de o variabilă reală

4.1 Să se determine α real a.î. următoarele funcții să fie continue pe mulțimile lor de definiție:

1) $f : [1, 3] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}, & x \in [1, 2), \\ \alpha x + 3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

2) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6 \sin \alpha(x-1)}{x-1}, & x \in [0, 1), \\ -\alpha + 5x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

R: 1) $\alpha = -\frac{1}{3}$. 2) $\alpha = -1$.

4.2 Să se determine α real a.î. următoarele funcții să fie continue în punctele indicate:

1) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(1 - \cos x)}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{\alpha^2}{2}, & x = 0, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 0.$$

2) $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot \arctg(x-1)}{x^2 - 1}, & x \neq 1, \\ \alpha^2, & x = 1, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 1.$$

3) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} (1 + \alpha x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x + e, & x \leq 0, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 0.$$

4) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^{x+2} - 16}{4^x - 16}, & x \neq 2, \\ \alpha, & x = 2, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 2.$$

5) $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x \in [0, 1], \\ \frac{\alpha \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & x \in (1, \pi], \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 1.$$

6) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x + e^x)x}, & x < 0, \\ e^2, & x = 0, \\ (\sin x + \cos x) \frac{\alpha}{x}, & x > 0, \end{cases} \quad \text{în } x_0 = 0.$$

R: 1) $\alpha \in \{0, 1\}$. 2) $\alpha \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. 3) $\alpha = 1$. 4) $\alpha = \frac{1}{2}$. 5) $\alpha = -3e^3$. 6) $\alpha = 2$.

4.3 Să se determine punctele de discontinuitate ale funcțiilor:

$$1) f(x) = [\sqrt{x}] - \sqrt{x}, \quad x > 0. \quad 2) f(x) = x \left[\frac{1}{x} \right], \quad x \neq 0, \quad f(0) = 1.$$

$$3) f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0. \quad 4) f(x) = x^p \arctg \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad p > 0.$$

R: 1) Discontinuuă în $x = n^2$, $n \in \mathbf{N}$. 2) Discontinuuă în $x = \frac{1}{k}$, cu k întreg nenul. 3) și 4) Funcții continue pe \mathbf{R} .

4.4 Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & x \in \mathbf{Q}, \\ -\frac{1}{4}x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

R: Dacă $x_0 \in \mathbf{R}$ este un punct de continuitate pentru f , atunci pentru orice șir $x_n \in \mathbf{Q}$, $x_n \rightarrow x_0$ și orice șir $x'_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $x'_n \rightarrow x_0$, avem: $x_0^3 - x_0^2 = -\frac{1}{4}x_0$, de unde rezultă că $x_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.

4.5 Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1 - x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, să se arate că $f([0, 1])$ este un interval și că f nu are proprietatea lui Darboux.

R: Punctul $x_0 \in [0, 1]$ este un punct de continuitate pentru f d.d. $\sqrt{x_0} = 1 - x_0$, adică $x_0 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ este singurul punct de continuitate al lui f . Pentru orice $x \in [0, 1]$, $\sqrt{x}, 1 - x \in [0, 1]$, deci $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Fie $y \in [0, 1]$. Dacă $y \in \mathbf{Q}$, există $x = y^2$ ($x \in \mathbf{Q}$) a.î. $f(x) = y$, iar dacă $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, există $x = 1 - y$ ($x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$) a.î. $f(x) = y$. Așadar, $[0, 1] \subset f([0, 1])$. Avem: $f([0, 1]) = [0, 1]$. Pentru a arăta că f nu are proprietatea lui Darboux, fie intervalul $\left[\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right] \subset [0, 1]$, cu $f\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{3}$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Considerăm $\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{17}} \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ și arătăm că ecuația $f(x) = \lambda$ nu are soluții în intervalul $\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right)$. Dacă $x \in \mathbf{Q}$, $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{17}}$, dacă $x = \frac{1}{\sqrt[4]{17}} \notin \mathbf{Q}$, dacă $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, $1 - x = \frac{1}{\sqrt[4]{17}}$, dacă $x = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{17}} \notin \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{4}\right)$, deoarece $1 - \frac{1}{\sqrt[4]{17}} > \frac{1}{4}$.

4.2 Continuitatea uniformă a funcțiilor de o variabilă

4.6 Să se arate că funcția $f(x) = x^3$, $x \in [1, 3]$ este uniform continuă pe $[1, 3]$.

R: Intr-adevăr,

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \cdot (x^2 + xx' + x'^2) < 27|x - x'| < \varepsilon,$$

pentru orice $x, x' \in [1, 3]$ pentru care $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$, cu $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{27}$.

4.7 Să se arate că funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + x,$$

este uniform continuă pe $(0, \infty)$.

R: Fie $x, x' \in (0, \infty)$. Avem

$$|f(x) - f(x')| = |x - x'| \left(1 + \frac{1}{(1+x)(1+x')}\right) < 2|x - x'| < \varepsilon,$$

dacă $|x - x'| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$.

4.8 Să se arate că funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + x,$$

nu este uniform continuă pe $(-1, \infty)$.

R: Intr-adevăr, să considerăm şirurile $x_n = -\frac{n+1}{n+2}$, $x'_n = -\frac{n}{n+1}$. Avem

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Punctele x_n şi x'_n sunt oricât de apropiate pentru n suficient de mare, însă

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 1,$$

deci funcţia nu este uniform continuă.

4.9 Să se arate că funcţia $f : [a, e] \rightarrow \mathbf{R}$, $a > 0$, definită prin $f(x) = \ln x$, este uniform continuă pe $[a, e]$.

R: Funcţia f este continuă pe intervalul $[a, e]$ mărginit şi închis, deci este uniform continuă pe acest interval.

4.10 Să se arate că funcţia $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \ln x$, este nu uniform continuă pe $(0, 1)$.

R: Fie $x_n = \frac{1}{n}$, $x'_n = \frac{1}{n^2+1}$. Avem $|x_n - x'_n| < \delta$, dar

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left| \ln \frac{n^2+1}{n} \right| \rightarrow \infty.$$

4.11 Să se studieze uniforma continuitate a funcţiei $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x \sin^2 x^2$.

R: Fie

$$x_n = \sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}}.$$

Avem

$$|x_n - x'_n| = \frac{\pi}{\sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}}} \rightarrow 0$$

şi

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left| \sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(4n+3)\frac{\pi}{2}} \right| \rightarrow 0.$$

Dar, pentru $x''_n = \sqrt{2n\pi}$, avem

$$|f(x_n) - f(x''_n)| = \left| \sqrt{(4n+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi} \cdot 0 \right| \rightarrow \infty.$$

Aşadar, f nu este uniform continuă pe \mathbf{R} .

4.12 Să se studieze uniforma continuitate a următoarelor funcții:

- 1) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$. 2) $f : [a, e] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x, a > 0$.
 3) $f : \left(0, \frac{1}{\pi}\right) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \sin \frac{1}{x}$. 4) $f : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x^2$.
 5) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$. 6) $f : \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \cos x$.
 7) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}_+, f(x) = \frac{1}{x}$. 8) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2$.

R: 1) Nu. 2) Da. 3) Nu. 4) Nu. 5) Da. 6) Da, se ține seama că

$$|\cos x - \cos x'| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x'}{2} \right| \leq 2|x - x'|.$$

7) Nu, este suficient să luăm $x_n = \frac{1}{n}$ și $x'_n = \frac{1}{n+1}$. 8) Nu, este suficient să luăm $x_n = n$ și $x'_n = n + \frac{1}{n}$.

4.3 Continuitatea funcțiilor de o variabilă vectorială

4.13 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

este continuă pe \mathbf{R}^2 .

R: Funcția este continuă în orice punct în care $x^2 + y^2 \neq 0$, adică în orice punct cu excepția originii. Rămâne de verificat numai continuitatea în origine, ceea ce revine la a arăta că funcția are limită în origine și aceasta este egală cu 0. Avem, însă:

$$\left| \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \right| < \frac{|x| |y|}{x^2 + y^2} \cdot |x| \cdot y^2 \leq \frac{1}{2} \cdot |x| \cdot y^2,$$

deoarece $x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$. Deci limita funcției este 0.

4.14 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

este continuă pe \mathbf{R}^2 .

R: Funcția este continuă în orice punct în care $x^2 + y^2 \neq 0$, adică în orice punct cu excepția originii. Rămâne de verificat numai continuitatea în origine, ceea ce revine la a arăta că funcția are limită în origine și aceasta este egală cu 0. Putem scrie:

$$\frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}.$$

Însă $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^3 + y^3} = 1$ și

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} < |x| + |y|.$$

4.15 Să se cerceteze continuitatea funcției

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

R: Punem $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Funcția este continuă pe \mathbf{R}^2 .

4.16 Să se arate că funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

este continuă parțial în raport cu x și y , dar nu este continuă în origine.

R: Fie $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Funcțiile $f(x, y_0)$ și $f(x_0, y)$ sunt continue în orice punct. Funcția $f(x, y)$ nu are limită în origine.

4.17 Să se cerceteze continuitatea următoarelor funcții:

$$1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$$2) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(1 + xy)\sqrt{x} + \sqrt{y}}, & x > 0 \text{ și } y > 0, \\ 1, & x = 0 \text{ sau } y = 0. \end{cases}$$

R: 1) Se ține seama că $1 - \cos(x^3 + y^3) = 2 \sin^2 \frac{x^3 + y^3}{2}$. Funcția este continuă. 2) Putem scrie

$$(1 + xy) \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \left[(1 + xy) \frac{1}{xy} \right] \frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

și $\frac{xy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})$. Funcția este continuă.

4.18 Să se discute după valorile parametrului α continuitatea următoarelor funcții:

$$1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\operatorname{tg}(x^2 + y^2)}, & 0 < x^2 + y^2 < \frac{\pi}{2}, \\ \alpha, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$2) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ \alpha, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$3) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{3x + 2y - z + x^2 + yz}{x + y + z}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ \alpha, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

$$4) f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(x + y + z) \operatorname{tg}(x^2 + y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \\ \alpha, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

R: 1) Notăm $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Avem $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{r}}{\operatorname{tg} r} = \frac{1}{2}$. Funcția este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru $\alpha = \frac{1}{2}$.

2) Fie $x = \ell t, y = mt, z = nt, t \in \mathbf{R}$ o dreaptă prin origine. Deoarece

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\ell t, mt, nt) = \frac{\ell^2 m^2 n^2}{\ell^6 + m^6 + n^6},$$

deci depinde de direcție, rezultă că f nu are limită în origine. Funcția este continuă pe $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Capitolul 5

Derivate și diferențiale

5.1 Derivata și diferențiala funcțiilor de o variabilă

5.1 Utilizând definiția, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, în punctele specificate:

- 1) $f(x) = \sqrt{x+2}$, în $x_0 = 7$. 2) $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$, în $x_0 = 1$.
3) $f(x) = \sin 3x^2$, în $x_0 = \sqrt{\pi}$. 4) $f(x) = \arcsin(x-1)$, în $x_0 = 1$.
5) $f(x) = e^{3x}$, în $x_0 = 1$. 6) $f(x) = \operatorname{tg} x$, în $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2 Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții, în punctele specificate:

- 1) $f: \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x), & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right], \\ 2x, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ în $x_0 = 0$.
2) $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2}, & x \in (0, 2], \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4}, & x \in (0, \infty), \end{cases}$ în $x_0 = 2$.

R: 1) $f'(0) = 2$. 2) $f'(2) = \frac{9}{8}$.

5.3 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

- 1) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 8$. 2) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$.
3) $f(x) = x \cos x$. 4) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.
5) $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$. 6) $f(x) = \ln \frac{x^2}{x+1}$.
7) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. 8) $f(x) = e^{x^2 \cos x}$.

R: Se obține:

- 1) $f'(x) = 4x^3 + 15x^2$. 2) $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

$$3) f'(x) = \cos x - x \sin x. \quad 4) f'(x) = -\frac{x^2 - 2x - 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$5) f'(x) = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}. \quad 6) f'(x) = \frac{1}{x} \frac{x + 2}{x + 1}.$$

$$7) f'(x) = -\frac{4}{3} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \sqrt[3]{\left(\frac{x^2 + 1}{1 - x^2}\right)^2}.$$

$$8) f'(x) = (2x \cos x - x^2 \sin x) e^{x^2 \cos x}.$$

5.4 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

$$1) f(x) = \ln(\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1}). \quad 2) f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

$$3) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + k}). \quad 4) f(x) = 5 \operatorname{sh}^3 \frac{x}{15} + 3 \operatorname{sh}^5 \frac{x}{15}.$$

$$5) f(x) = e^{x \operatorname{arctg} e^x} - \ln \sqrt{1 + e^{2x}}. \quad 6) f(x) = \frac{x^x}{e^x} (x \ln x - x - 1).$$

$$7) f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}. \quad 8) f(x) = \log_{e^2} (x^n + \sqrt{x^{2n} + 1}).$$

R: Se obține:

$$1) f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{(4 \sin^2 x - 1)}}. \quad 2) f'(x) = \frac{2}{\cos^3 x}.$$

$$3) f'(x) = \sqrt{x^2 + k}. \quad 4) f'(x) = \operatorname{sh}^2 \frac{x}{15} \operatorname{ch}^3 \frac{x}{15}.$$

$$5) f'(x) = e^{x \operatorname{arctg} e^x}. \quad 6) f'(x) = x^{x+1} e^{-x} (\ln x - 1).$$

$$7) f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2}. \quad 8) f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n} + 1}}.$$

5.5 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

$$1) f(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} + 2 \operatorname{arctg} (\sqrt{\sin x}).$$

$$2) f(x) = \frac{3}{4} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$3) f(x) = \frac{1}{3} \ln(1 + x) - \frac{1}{6} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$$

$$4) f(x) = 3b^2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{b - x}} - (3b + 2x) \sqrt{bx - x^2}.$$

R: 1) $f'(x) = \frac{2}{\cos x \sqrt{\sin x}}.$ 2) $f'(x) = \frac{x(x - 3)}{x^4 - 1}.$ 3) $f'(x) = \frac{1}{x^3 + 1}.$

4) $f'(x) = 4x \sqrt{\frac{x}{b - x}}.$

5.6 Să se calculeze derivatele următoarelor funcții:

- 1) $f(x) = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$
- 2) $f(x) = \ln \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3}}.$
- 3) $f(x) = \frac{x}{4(x^2 + 1)^2} + \frac{3x}{8(x^2 + 1)} + \frac{3}{8} \arctg x.$
- 4) $f(x) = \frac{5}{2} \sqrt{(2x^2 + 8x + 1)} - \frac{13}{\sqrt{2}} \ln \left(\sqrt{2}(x + 2) + \sqrt{(2x^2 + 8x + 1)} \right).$

R: Se obține:

- 1) $f'(x) = \frac{\arcsin x}{x^2}.$ 2) $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1}.$
- 3) $f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}.$ 4) $f'(x) = \frac{5x - 3}{\sqrt{2x^2 + 8x + 1}}.$

5.7 Să se arate că derivata unei funcții pare este o funcție impară, iar derivata unei funcții impare este o funcție pară.

5.8 Să se arate că derivata unei funcții periodice este o funcție periodică.

5.9 Să se arate că funcția $y = xe^{-x}$ satisface relația $xy' = (1 - x)y$.

5.10 Să se arate că funcția $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ satisface relația $xy' = (1 - x^2)y$.

5.11 Să se arate că funcția $y = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ satisface relația $xy' = y(y \ln x - 1)$.

5.12 Să se calculeze derivatele de ordinul doi ale următoarelor funcții:

- 1) $f(x) = x^8 + 7x^6 - 5x + 4.$ 2) $f(x) = (\arcsin x)^2.$ 3) $f(x) = e^{x^2}.$
- 4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$ 5) $f(x) = (1 + x^2) \arctg x.$ 6) $f(x) = \sin^2 x.$

R: Se obține:

- 1) $f''(x) = 56x^6 + 210x^4.$ 2) $f''(x) = \frac{2}{1 - x^2} + \frac{2x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} \arcsin x.$
- 3) $f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}.$ 4) $f''(x) = -\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}.$
- 5) $f''(x) = 2 \arctg x + 2 \frac{x}{x^2 + 1}.$ 6) $f''(x) = 2 \cos 2x.$

5.13 Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții:

- 1) $f(x) = e^{ax}.$ 2) $f(x) = \frac{1}{x - a}.$ 3) $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}.$
- 4) $f(x) = \cos x.$ 5) $f(x) = \sin x.$ 6) $f(x) = \ln \frac{2x}{x^2 - 1}.$
- 7) $f(x) = 2^x.$ 8) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$ 9) $f(x) = \ln(ax + b).$
- 10) $f(x) = e^{ax} \cdot e^{bx}.$ 11) $f(x) = \frac{1}{ax + b}.$ 12) $f(x) = (1 + x)^\alpha.$

R: 3) Se ține seama de identitatea: $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$.

4) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$. 5) $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

6). $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$ și se scrie fracția ca sumă de fracții simple.

7) $f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2$.

8) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$, se obține $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$.

9) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. 10) $f^{(n)}(x) = e^{ax} \cdot e^{bx} (a+b)^n$.

11) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$.

12) Avem: $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

5.14 Fie $f(x) = x^2 \cdot e^{3x}$. Să se calculeze $f^{(10)}(x)$.

R: Se aplică formula lui Leibniz. Se obține: $f^{(10)}(x) = 3^9 \cdot e^{3x} \cdot (3x^2 + 20x + 30)$.

5.15 Fie $f(x) = x^2 \cdot \sin x$. Să se calculeze $f^{(20)}(x)$.

R: Se aplică regula lui Leibniz. Se obține: $f^{(20)}(x) = x^2 \sin x - 40x \cos x - 380 \sin x$.

5.16 Utilizând regula lui Leibniz, să se calculeze derivatele de ordinul n ale funcțiilor:

1) $f(x) = x \cdot e^x$. 2) $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$. 3) $f(x) = (1 - x^2) \cos x$.

4) $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$. 5) $f(x) = x^3 \ln x$.

5.17 Se consideră funcția polinomială $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Să se calculeze suma: $S = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{x_k - 2}$, unde x_k sunt rădăcinile ecuației $f(x) = 0$.

R: Din $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, prin derivare, deducem:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{x - x_k}.$$

$$\text{Deci } S = -\frac{f'(2)}{f(2)} = -\frac{49}{31}.$$

5.18 Să se determine cu cât se modifică (aproximativ) latura unui pătrat dacă aria sa crește de la 9 m^2 la $9,1 \text{ m}^2$.

R: Dacă x este aria pătratului și y latura sa, atunci $y = \sqrt{x}$. Se dau: $x_0 = 9$, $h = 0,1$. Creșterea laturii pătratului este dată de:

$$y - y_0 \approx dy = f'(x) \cdot h = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,1 = 0,016 \text{ m}.$$

5.19 Să se găsească creșterea $y - y_0$ și diferențiala dy ale funcției $y = 5x + x^2$ în punctul $x_0 = 2$, dacă $h = 0,001$.

R: $y - y_0 = 0,009001$ și $dy = 0,009$.

5.20 Să se calculeze diferențiala funcției $y = \cos x$ în punctul $x_0 = \frac{\pi}{6}$, pentru $h = \frac{\pi}{36}$.

5.21 Să se calculeze diferențiala funcției $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ în punctul $x_0 = 9$, pentru $h = -0,01$.

5.22 Să se calculeze diferențialele funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \frac{1}{x^n}. & 2) f(x) = x \ln x - x. & 3) f(x) = \frac{x}{1-x}. \\ 4) f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}. & 5) f(x) = x^2 e^{-x}. & 6) f(x) = e^x \sin x. \end{array}$$

R: Se obține:

$$\begin{array}{l} 1) df(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} dx. \quad 2) df(x) = \ln x dx. \quad 3) df(x) = \frac{1}{(1-x)^2} dx. \\ 4) df(x) = \frac{2}{x^2-1} dx. \quad 5) df(x) = x(2-x)e^{-x} dx. \quad 6) df(x) = e^x(\sin x + \cos x) dx. \end{array}$$

5.23 Să se calculeze diferențialele de ordinul doi ale funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = \sqrt{1-x^2}. & 2) f(x) = \arccos x. & 3) f(x) = \sin x \ln x. \\ 4) f(x) = \frac{1}{x} \ln x. & 5) f(x) = x^2 e^{-x}. & 6) f(x) = e^x \sin x. \end{array}$$

5.24 Să se arate că:

$$d^n(\arctg x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \cdot \sin\left(n \arctg \frac{1}{x}\right) dx^n.$$

5.2 Proprietăți ale funcțiilor derivabile

5.25 Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcțiilor:

$$\begin{array}{lll} 1) f(x) = 2 \cos x + x^2. & 2) f(x) = x^2(x-12)^2. & 3) f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}. \\ 4) f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}. & 5) f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x. & 6) f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos \frac{x}{3}. \end{array}$$

R: 1) $x_0 = 0$ este punct de minim.

2) $x_1 = 0$, $x_2 = 12$ sunt puncte de minim, $x_3 = 6$ este punct de maxim.

3) $x_1 = 0$ este punct de maxim, $x_2 = 2$ este punct de minim.

4) $x_{1,2} = \pm 1$ sunt puncte de minim, $x_3 = 0$ este punct de maxim.

5) $x_k = -\frac{\pi}{6} + k\pi$ sunt puncte de minim, $x'_k = \frac{\pi}{6} + k\pi$ sunt puncte de maxim.

6) $x_k = 12k\pi$ și $x'_k = 12\left(k \pm \frac{2}{5}\right)\pi$ sunt puncte de maxim, $y_k = 6(2k+1)\pi$ și $y'_k = 12\left(k \pm \frac{1}{5}\right)\pi$ sunt puncte de minim.

5.26 Fie $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ și $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x \geq n$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că atunci $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$.

R: Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x$. Avem că $f(x) \geq n = f(0)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $x_0 = 0$ este un punct de minim pentru f și conform teoremei lui Fermat: $f'(0) = 0$.

5.27 Fie $a, b \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ a.î. $a^{x^2} \cdot b + b^{x^2} \cdot a \geq 2ab$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că $ab = 1$.

R: Fie funcția $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a^{x^2} \cdot b + b^{x^2} \cdot a$. Avem că $f(x) \geq 2ab = f(1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci $x_0 = 1$ este un punct de minim pentru f și conform teoremei lui Fermat: $f'(1) = 0$.

5.28 Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

R: Funcția nu este derivabilă în $\frac{\pi}{4}$.

5.29 Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile $f : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin:

$$1) f(x) = |x - 1|. \quad 2) f(x) = |x - 1|^3.$$

R: 1) Nu. 2) Da, $c = 1$.

5.30 Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcțiile $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin:

$$1) f(x) = |\sin x|. \quad 2) f(x) = |\sin^3 x|.$$

R: 1) Nu. 2) Da, $c = 0$.

5.31 Să se arate că polinomul lui Legendre $P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ are n rădăcini distincte în intervalul $(-1, 1)$.

R: Se aplică de n ori teorema lui Rolle funcției $f(x) = (x^2 - 1)^n$.

5.32 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) și a.î. $f(a) = f(b)$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ a.î. $f(a) - f(c) = f'(c)(c - a)$.

R: Se aplică teorema lui Rolle funcției $g(x) = (x - a)f(x) - xf(a)$ pe intervalul $[a, b]$.

5.33 Fie numerele reale $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ care verifică relația

$$\frac{a_0}{1} + \frac{2a_1}{2} + \frac{2^2 a_2}{3} + \dots + \frac{2^n a_n}{n+1} = 0.$$

Să se arate că funcția $f : [1, e^2] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = a_0 + a_1 \ln x + a_2 \ln^2 x + \dots + a_n \ln^n x$ se anulează cel puțin într-un punct din intervalul $(1, e^2)$.

R: Se aplică teorema lui Rolle funcției $g(x) = a_0 \ln x + \frac{a_1 \ln^2 x}{2} + \dots + \frac{a_n \ln^{n+1} x}{n+1}$.

5.34 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) . Să se arate că există $c \in (a, b)$ a.i.

$$f'(c) = \frac{a + b - 2c}{(c-a)(c-b)}.$$

R: Se aplică teorema lui Rolle funcției $g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-b)$ pe intervalul $[a, b]$.

5.35 Se consideră funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0], \\ px^2 + 4x + 4, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Să se determine $m, n, p \in \mathbf{R}$ a.i. f să satisfacă ipotezele teoremei lui Rolle pe intervalul $[-1, 1]$ și să se găsească valoarea constantei c în acest caz.

R: $n = 4, m = 4, p = -7, c = \frac{2}{7}$.

5.36 Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ două funcții continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) și cu $f(a) = f(b)$. Să se arate că ecuația $f(x)g'(x) + f'(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul (a, b) .

R: Fie $h : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $h(x) = f(x)e^{g(x)}$, care este o funcție Rolle. Există deci $c \in (a, b)$ a.i. $h'(c) = 0$. Dar $h'(x) = f'(x)e^{g(x)} + f(x)g'(x)e^{g(x)}$.

5.37 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție de trei ori derivabilă pe $[a, b]$ a.i. $f(a) = f(b) = 0$ și $f'(a) = f'(b) = 0$. Să se arate că există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ a.i. $f'''(c) = 0$.

R: Aplicăm teorema lui Rolle. Există $d \in (a, b)$ a.i. $f'(d) = 0$. Există apoi $c_1 \in (a, d)$ și $c_2 \in (d, b)$ a.i. $f''(c_1) = 0$ și $f''(c_2) = 0$. Deci există $c \in (c_1, c_2)$ a.i. $f'''(c) = 0$.

5.38 Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x^2 + ax}$, $a > 0$, și în caz afirmativ să se determine constanta c corespunzătoare.

R: Da, $c = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + a}) \in (0, 1)$.

5.39 Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcțiilor f , definite prin:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \begin{cases} x, & x \in [1, 2], \\ \frac{x^2}{4} + 1, & x \in (2, 3]. \end{cases} & 2) f(x) &= \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1], \\ 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases} \\ 3) f(x) &= \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \in (0, 3], \\ \frac{x}{2} + 1, & x \in [-4, 0]. \end{cases} & 4) f(x) &= \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & x \in [0, 1], \\ \frac{1}{x}, & x \in (1, 2]. \end{cases} \end{aligned}$$

R: 1) Da, $f'(c) = \frac{9}{8}$, $c = \frac{9}{4}$. 2) Da, $c = \frac{3}{4}$. 3) Da, $c = \frac{13}{36}$. 4) Da, $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \sqrt{2}$.

5.40 Să se determine abscisa c a unui punct în care tangenta la graficul funcției $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & x \leq 0, \\ \sqrt{x+1}, & x > 0, \end{cases}$$

este paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x_1 = -4$ și $x_2 = 3$.

R: $c = \frac{13}{36}$.

5.41 Să se arate că $\sqrt[3]{30} - 3 < \frac{1}{9}$.

R: Se aplică teorema lui Lagrange funcției $f : [27, 30] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

5.42 Să se găsească soluțiile reale ale ecuației $(a-1)^x + (a+3)^x = a^x + (a+2)^x$, cu $a > 1$.

R: Ecuația se mai scrie: $a^x - (a-1)^x = (a+3)^x - (a+2)^x$. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(t) = t^x$, pentru $x \in \mathbf{R}$, fixat. Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalele $[a-1, a]$ și $[a+2, a+3]$. Există deci $c_1 \in (a-1, a)$ și $c_2 \in (a+2, a+3)$ a.î. $f(a) - f(a-1) = f'(c_1)$ și $f(a+3) - f(a+2) = f'(c_2)$. Din $f'(c_1) = f'(c_2)$ cu $c_1 \neq c_2$, rezultă $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5.43 Fie f o funcție de două ori derivabilă într-o vecinătate V a punctului $a \in \mathbf{R}$. Să se arate că pentru orice h suficient de mic există punctele $p, q \in V$ a.î.

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(p), \quad \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(q).$$

5.44 Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Cauchy pentru funcțiile f și g , definite prin:

$$\begin{aligned} 1) f, g : [1, e] &\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x, g(x) = \frac{e}{x}. \\ 2) f, g : [-2, 5] &\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & x \in [-2, 1], \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4}, & x \in [1, 5], \end{cases} g(x) = x. \\ 3) f, g : [0, 3] &\rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in [1, 3], \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0, 1], \end{cases} g(x) = x. \end{aligned}$$

R: 1) Da, $c = \frac{e}{e-1}$. 2) Da, $c = \frac{1}{16}$. 3) Da, $c = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1$.

5.45 Să se calculeze, utilizând regula lui l'Hospital:

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}. & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}. & 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}. \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}}, \quad a > 0. & 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right). & 6) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}. \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right). & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \ln \frac{1+x}{x} \right). & 9) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}. \end{array}$$

R: 1) 2. 2) -2 . 3) 1. 4) 0. 5) 0. 6) $-\frac{1}{2}$. 7) Putem scrie:

$$\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x = \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

și se aplică de patru ori regula lui l'Hospital. Se obține $\frac{2}{3}$. 8) Luăm $x = \frac{1}{t}$, cu $t \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow \infty$. Se obține $\frac{1}{2}$. 9) $\frac{1}{e}$.

5.46 Să se calculeze, utilizând regula lui l'Hospital:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x \sin x}{x - \sin x}. \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x [\ln x - \ln(x+1)] + 1}{ex [\ln(ex+1) - \ln x] - 1}.$$

R: 1) 5. 2) $-e$.

5.47 Să se dezvolte polinomul $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ după puterile binomului $x - 2$.

R: $f(x) = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3$.

5.48 Să se determine o funcție polinomială de gradul trei a.î. $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ și $f'''(0) = 6$.

R: Polinomul Taylor al funcției f este $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3$.

5.49 Să se găsească primii 5 termeni din dezvoltarea Taylor a funcției $f(x) = e^x$ după puterile binomului $x + 1$.

R: $P_4(x) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e}(x+1) + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \frac{1}{6e}(x+1)^3 + \frac{1}{24e}(x+1)^4$.

5.50 Să se găsească primii 5 termeni din dezvoltarea Taylor a funcției $f(x) = \ln x$ după puterile binomului $x - 1$.

$$\mathbf{R}: P_4(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4.$$

5.51 Să se evalueze eroarea comisă în aproximarea:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

R: Avem că: $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + R_4(x)$, unde $R_4(x) = \frac{x^5}{5!}e^{\theta x}$, cu $\theta \in (0, 1)$. Pentru $x = 1$, $|R_4(1)| \leq \frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$.

5.52 Să se scrie formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcțiile:

- 1) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.
- 2) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$.
- 3) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.
- 4) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, \infty)$.
- 5) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x \in (-1, \infty)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

R: Avem dezvoltările:

$$\begin{aligned} 1) \quad e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}. \\ 2) \quad \sin x &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(\theta x). \\ 3) \quad \cos x &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos(\theta x). \\ 4) \quad \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \\ 5) \quad (1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \text{ cu } \theta \in (0, 1). \end{aligned}$$

5.53 Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel ca polinomul Taylor de gradul n în punctul $x_0 = 0$ asociat funcției $f(x) = e^x$ să aproximeze funcția pe intervalul $[-1, 1]$ cu trei zecimale exacte.

R: Avem

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} < \frac{1}{1000}, \quad |x| \leq 1.$$

Dar cum $\theta x < 1$, $e^{\theta x} < e < 3$ și deci $|R_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$ pentru $n \geq 6$.

5.54 Să se scrie formula Mac-Laurin de ordinul n pentru funcția $f(x) = \sqrt{a+x}$, $a > 0$, $x > -a$.

R: Funcția se mai scrie: $f(x) = \sqrt{a} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$. Se obține:

$$f(x) = \sqrt{a} \left[1 + \frac{x}{2a} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2k-3)}{k! \cdot 2^k} \left(\frac{x}{a}\right)^k + R_n(x) \right].$$

5.55 Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel ca valorile polinomului Taylor de gradul n în punctul $x_0 = 0$ asociat funcției $f(x) = \sqrt{1+x}$, pe intervalul $[0, 1]$, să nu difere de $f(x)$ cu mai mult de $\frac{1}{16}$.

R: Avem

$$|R_n(x)| = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} \left| \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}} < \frac{1}{16}.$$

Se obține $n \geq 2$.

5.56 Utilizând formula Mac-Laurin să se calculeze următoarele limite:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - \sin^2 x - 2}{x^4}. & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}. \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}. & 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cdot \cos x}{\operatorname{tg}^4 x}. \\ 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}. \end{array}$$

R: 1) $\frac{1}{12}$. 2) 4. 3) $\cos a$. 4) $\frac{1}{3}$. 5) $-\frac{1}{12}$.

5.3 Derivatele și diferențiala funcțiilor de n variabile

5.57 Utilizând definiția, să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții, în punctele specificate:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 2y^3 \text{ în } (1, 1). & 2) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y} \text{ în } (1, 1). \\ 3) f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} \text{ în } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right). & 4) f(x, y) = \ln(1+x+y^2) \text{ în } (1, 1). \\ 5) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \text{ în } (2, 1). & 6) f(x, y) = \ln(x-y^2) \text{ în } (4, 1). \end{array}$$

R: Se obține:

$$\begin{array}{ll} 1) f'_x(1, 1) = -3, f'_y(1, 1) = 3. & 2) f'_x(1, 1) = \frac{1}{2}, f'_y(1, 1) = -\frac{1}{2}. \\ 3) f'_x\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}, f'_y\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = 0. & 4) f'_x(1, 1) = \frac{1}{3}, f'_y(1, 1) = \frac{2}{3}. \\ 5) f'_x(2, 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f'_y(2, 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}. & 6) f'_x(4, 1) = \frac{1}{3}, f'_y(4, 1) = -\frac{2}{3}. \end{array}$$

5.58 Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

$$\begin{array}{ll}
 1) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy. & 2) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}. \\
 3) f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}. & 4) f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \\
 5) f(x, y) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right). & 6) f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \\
 7) f(x, y) = e^{\sin \frac{y}{x}}. & 8) f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}.
 \end{array}$$

R: Se obține:

$$\begin{array}{ll}
 1) f'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, f'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax. \\
 2) f'_x(x, y) = \frac{2y}{(x+y)^2}, f'_y(x, y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}. \\
 3) f'_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, f'_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \\
 4) f'_x(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, f'_y(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}. \\
 5) f'_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} (x + \sqrt{x^2 + y^2})}. \\
 6) f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}. \\
 7) f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2} e^{\sin \frac{y}{x}} \cos \frac{y}{x}, f'_y(x, y) = \frac{1}{x} e^{\sin \frac{y}{x}} \cos \frac{y}{x}. \\
 8) f'_x(x, y) = \frac{xy\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}, f'_y(x, y) = -\frac{x^2\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}.
 \end{array}$$

5.59 Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

$$\begin{array}{ll}
 1) f(x, y) = yx \sin \frac{y}{x}. & 2) f(x, y) = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}. \\
 3) f(x, y) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}. & 4) f(x, y) = xy \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-\frac{x}{z}xy}. \\
 5) f(x, y, z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. & 6) f(x, y, z) = e^{\frac{x}{y}} - e^{-\frac{z}{y}}. \\
 7) f(x, y, z) = e^{xyz} \cos \frac{y}{xz}. & 8) f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}.
 \end{array}$$

5.60 Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

$$\begin{array}{l}
 1) f(x, y) = \ln [xy^2 + x^2y] + \sqrt{1 + (xy^2 + x^2y)^2}. \\
 2) f(x, y) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2} + \arcsin \left(\frac{x+y}{xy} \right).
 \end{array}$$

5.61 Să se calculeze, utilizând definiția, următoarele derivate parțiale de ordinul doi:

- 1) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. 2) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2, 2)$, dacă $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$.
 3) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, dacă $f(x, y) = x \sin(x + y)$. 4) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1)$, dacă $f(x, y) = xy \ln x$.

R: 1) Deoarece

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)}{y - 1},$$

se obține $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 2) $\frac{1}{9}$. 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) 1.

5.62 Să se calculeze derivatele parțiale ale următoarelor funcții:

- 1) $f(x, y, z) = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$. 2) $f(x, y, z) = (xy)^z$.
 3) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 4) $f(x, y, z) = z^{xy}$.

R: Se obține:

- 1) $f'_x(x, y, z) = 3x^2 y^2 z + 2$, $f'_y(x, y, z) = 2x^3 y z - 3$, $f'_z(x, y, z) = x^3 y^2 + 1$.
 2) $f'_x(x, y, z) = \frac{z}{x}(xy)^z$, $f'_y(x, y, z) = \frac{z}{y}(xy)^z$, $f'_z(x, y, z) = (xy)^z \ln(xy)$.
 3) $f'_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $f'_y(x, y, z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,
 $f'_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
 4) $f'_x(x, y, z) = y z^{xy} \ln z$, $f'_y(x, y, z) = x z^{xy} \ln z$, $f'_z(x, y, z) = \frac{xy}{z} z^{xy}$.

5.63 Să se arate că următoarele funcții sunt omogene și apoi să se verifice relația lui Euler:

- 1) $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. 2) $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}$.
 3) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 4) $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln \frac{x - y}{x + y}$.
 5) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{y}{x}$. 6) $f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{\frac{y}{x}}$.

5.64 Să se arate că dacă $u = f(x, y, z)$ este o funcție omogenă de grad de omogenitate m , care admite derivate parțiale de ordinul doi continue pe $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$, atunci:

- 1) $x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = (m - 1) \frac{\partial f}{\partial x}$.
 2) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + 2zx \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = m(m - 1) f$.

5.65 Să se arate că funcțiile date mai jos satisfac egalitățile scrise în dreptul lor:

$$1) z = \ln(x^2 + xy + y^2), \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

$$2) z = xy + xe^{\frac{y}{x}}, \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

$$3) u = (x - y)(y - z)(z - x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

$$4) u = x + \frac{x - y}{y - z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1.$$

$$5) u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x + y + z}.$$

5.66 Se dăa funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Să se arate că deși nu sunt satisfăcute ipotezele teoremei lui Schwarz, totuși

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

R: Să observăm că teorema lui Schwarz dă condiții suficiente nu și necesare pentru egalitatea derivatelor mixte.

Deoarece pentru $x > 1$, $\ln x > x$, avem

$$0 < y^2 \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = 2y^2 \ln \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} < 2y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = 2|y| \sqrt{x^2 + y^2},$$

deci $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0$, apoi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \ln\left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = 0. \end{aligned}$$

Dar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0, \end{cases}$$

nu este continuă în origine.

5.67 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi ale funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= 2x^2 - 3xy - y^2. & 2) f(x, y) &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}. \\ 3) f(x, y) &= \ln(x^2 + y). & 4) f(x, y) &= \sqrt{2xy + y^2}. \\ 5) f(x, y) &= \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}. & 6) f(x, y) &= (\arcsin xy)^2. \\ 7) f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. & 8) f(x, y, z) &= xy + yz + zx. \end{aligned}$$

5.68 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul doi, în origine, ale funcției:

$$f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n.$$

$$\mathbf{R:} \quad f_{xx}(0, 0) = m(m-1), \quad f_{xy}(0, 0) = mn, \quad f_{yy}(0, 0) = n(n-1).$$

5.69 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul $m+n$:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}(x, y), \text{ dacă: } 1) f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}. \quad 2) f(x, y) = (x^2 + y^2) e^{x+y}.$$

$\mathbf{R:}$ 1) Prin inducție după n și apoi după m , se obține:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}(x, y) = (-1)^n \cdot 2(m+n-1)! \cdot \frac{mx + ny}{(x-y)^{m+n+1}}.$$

2) Se obține:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^m \partial x^n}(x, y) = [x^2 + y^2 + 2(mx + ny) + m(m-1) + n(n-1)] e^{x+y}.$$

5.70 Să se arate că funcțiile:

$$1) u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad 2) u = \ln \frac{1}{r}, \quad \text{unde } r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

satisfac ecuația lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

5.71 Să se arate că funcția $u = A \sin(a\lambda t + \varphi) \sin \lambda x$ satisface ecuația undelor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

5.72 Să se arate că funcția

$$u = \frac{1}{(\sqrt{\pi t})^3} \cdot e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t}}$$

satisfacă ecuația căldurii:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

5.73 Se dă funcția $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$. Să se găsească variația și diferențiala funcției în punctul (x_0, y_0) .

R: Variația funcției este:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = [(2x_0 + y_0) \cdot h + (x_0 - 2y_0) \cdot k] + (h^2 + hk - k^2).$$

Deci diferențiala este $df(x_0, y_0) = (2x_0 + y_0) \cdot h + (x_0 - 2y_0) \cdot k$.

5.74 Se dă funcția $f(x, y) = x^2y$. Să se calculeze variația și diferențiala funcției în punctul $(x_0, y_0) = (1, 2)$, pentru: 1) $(h, k) = (1, 2)$, 2) $(h, k) = (0, 1; 0, 2)$.

5.75 Utilizând definiția, să se arate că următoarele funcții sunt diferențiabile în punctele specificate:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= (x-1)^2 + y^2 \text{ în } (1, 1). & 2) f(x, y) &= x^2 + (y-2)^2 \text{ în } (1, 1). \\ 3) f(x, y) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ în } (3, 4, 5). & 4) f(x, y) &= \ln(x^3 + y^3) \text{ în } (0, 1). \end{aligned}$$

R: 1) Pentru orice $(h, k) \in \mathbf{R}^2$, avem

$$f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = 2k + (h^2 + k^2) = 2k + \alpha(k, h) \cdot \sqrt{h^2 + k^2},$$

cu $\alpha(k, h) = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$, pentru $(k, h) \rightarrow (0, 0)$, iar $df(1, 1) = 2k$.

5.76 Să se arate că în origine, funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

este continuă, admite derivate parțiale, însă nu este diferențiabilă.

R: Din

$$0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} < \frac{|xy|}{\sqrt{y^2}} = |x|,$$

deducem că f este continuă în origine. Utilizând definiția se arată că funcția are derivate parțiale în origine egale cu 0.

Să arătăm că funcția nu este diferențiabilă în origine. Dacă ar fi diferențiabilă în origine, ar avea loc egalitatea:

$$f(x, y) - 0 = 0(x - 0) + 0(y - 0) + \alpha(x, y) \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

în care $\alpha(x, y)$ să aibă limită în origine egală cu 0. Dar din egalitatea precedentă rezultă $\alpha(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, funcție care nu are limită în origine.

5.77 Să se cerceteze dacă funcția $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ este diferențiabilă în origine.

R: Funcția nu admite derivate parțiale în origine, deci nu este diferențiabilă în origine.

5.78 Să se calculeze diferențialele funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= x^3 + y^3 - 3xy. & 2) f(x, y) &= x^2 y^3. \\ 3) f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. & 4) f(x, y) &= \sin^2 x + \sin^2 y. \\ 5) f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2). & 6) f(x, y) &= \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

R: 1) $df(x, y) = (3x^2 - 3y) dx + (3y^2 - 3x) dy$.

5.79 Să se calculeze diferențialele funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y, z) &= xyz. & 2) f(x, y, z) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \\ 3) f(x, y, z) &= \arctg \frac{xy}{z^2}. & 4) f(x, y, z) &= \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z. \end{aligned}$$

R: $df(x, y, z) = yz dx + zx dy + xy dz$.

5.80 Să se găsească cu cât se modifică (aproximativ) volumul unui con având raza bazei $x = 10$ cm și înălțimea $y = 30$ cm dacă raza se micșorează cu 1 mm, iar înălțimea crește cu 3 mm.

R: Volumul conului este $V = \frac{\pi}{3} x^2 y$. Variația volumului este dată de:

$$V - V_0 \approx dV = \frac{\pi}{3} (2xy dx + x^2 dy) = \frac{\pi}{3} (-600 \cdot 0,1 + 100 \cdot 0,3) = -10\pi \text{ cm}^3.$$

5.81 Să se calculeze aproximativ $(1, 02)^{3,01}$.

R: Considerăm funcția $z = x^y$. Luăm $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $h = 0,02$ și $k = 0,01$. Putem scrie:

$$z - z_0 \approx dz = x_0^{y_0-1} y_0 \cdot h + x_0^{y_0} \ln x_0 \cdot k = 3 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,01 = 0,06.$$

Deci $z \approx 1 + 0,06 = 1,06$.

5.82 Să se calculeze diferențialele de ordinul doi ale funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) f(x, y) &= \cos xy. & 2) f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}. & 3) f(x, y) &= e^{xy}. \\ 4) f(x, y) &= \ln xy. & 5) f(x, y, z) &= xyz. & 6) f(x, y, z) &= e^x \sin yz. \end{aligned}$$

R: 1) $d^2 f(x, y) = -(y^2 dx^2 + 2xy dx dy + x^2 dy^2) \cos xy.$

5.83 Să se calculeze diferențiala de ordinul doi a funcției $f(x, y, z) = \sin(x - 2y + z).$

5.84 Să se calculeze diferențiala de ordinul n a funcției $f(x, y) = e^{ax+by}.$

R: Se obține: $d^n f(x, y) = e^{ax+by} (a dx + b dy)^n.$

5.85 Aplicând formula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze $F'(x_0)$, știind că $F(x) = f(u(x), v(x))$ în care:

$$\begin{aligned} 1) f(u, v) &= u + uv, \quad u(x) = \cos x, \quad v(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}. \\ 2) f(u, v) &= e^{u-2v}, \quad u(x) = x^2, \quad v(x) = x^2 - 2, \quad x_0 = 2. \end{aligned}$$

5.86 Să se găsească $\frac{dz}{dt}$ dacă:

$$\begin{aligned} 1) z &= e^{3x+2y}, \quad \text{unde: } x = \cos t, \quad y = t^2. \\ 2) z &= \frac{x}{y}, \quad \text{unde: } x = e^t, \quad y = \ln t. \\ 3) z &= \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}, \quad \text{unde: } x = 3t^2, \quad y = \sqrt{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

5.87 Să se găsească $\frac{dz}{dt}$ dacă:

$$1) z = e^{x^2+y^2}, \quad \text{unde: } x = a \cos t, \quad y = a \sin t. \quad 2) z = \frac{1}{2} \ln \frac{x}{y}, \quad \text{unde: } x = \operatorname{tg}^2 t, \quad y = \operatorname{ctg}^2 t.$$

5.88 Să se găsească $\frac{du}{dt}$ dacă:

$$\begin{aligned} 1) u &= xyz, \quad \text{unde: } x = t^2 + 1, \quad y = \ln t, \quad z = \operatorname{tg} t. \\ 2) u &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{unde: } x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = H. \end{aligned}$$

5.89 Să se găsească $\frac{dz}{dx}$ dacă $z = u^v$, unde $u = \sin x$, $v = \cos x$.

5.90 Să se găsească $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{dz}{dx}$ dacă $z = x^y$, unde $y = \varphi(x)$.

5.91 Să se găsească $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$, dacă $z = f(u, v)$, unde $u = x^2 + y^2$ și $v = e^{xy}$.

5.92 Să se găsească $\frac{\partial z}{\partial u}$ și $\frac{\partial z}{\partial v}$, dacă $z = \arctg \frac{x}{y}$, unde $x = u \sin v$ și $y = u \cos v$.

5.93 Să se găsească $\frac{\partial z}{\partial u}$ și $\frac{\partial z}{\partial v}$, dacă $z = f(u)$, unde $u = xy + \frac{y}{x}$.

5.94 Să se arate că dacă $\omega = f(x^2 + y^2 + z^2)$, unde:

$$x = R \cos u \cos v, \quad y = R \cos u \sin v, \quad z = R \sin u,$$

atunci: $\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$ și $\frac{\partial \omega}{\partial v} = 0$.

5.95 Să se arate că dacă $z = f(x + ay)$, unde f este o funcție diferențiabilă, atunci

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial x}.$$

5.96 Să se arate că funcția $w = f(u, v)$, unde f este o funcție diferențiabilă și $u = x + at$, $v = y + bt$, satisface ecuația:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y}.$$

5.97 Să se arate că funcția $z = yf(x^2 - y^2)$, unde f este o funcție diferențiabilă, satisface ecuația:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

5.98 Să se arate că funcția $z = xy + f\left(\frac{y}{x}\right)$, unde f este o funcție diferențiabilă, satisface ecuația:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

5.99 Să se arate că funcția $z = e^y f\left(\frac{x^2}{ye^{2y^2}}\right)$, unde f este o funcție diferențiabilă, satisface ecuația:

$$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

5.100 Să se arate că funcția $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$, unde f și g sunt o funcții de două ori diferențiabile, satisface ecuația:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5.101 Să se arate că funcția $z = f(xy) + \sqrt{xy} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$, unde f și g sunt o funcții de două ori diferențiabile, satisface ecuația:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

5.102 Să se arate că funcția $z = f(x + g(y))$ satisface ecuația:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

5.103 Să se găsească $d^2 z$ dacă:

- 1) $z = f(u)$, unde $u = x^2 + y^2$. 2) $z = u^v$, unde $u = \frac{x}{y}$, $v = xy$.
 3) $z = f(u, v)$, unde $u = ax$ și $v = ay$. 4) $z = f(u, v)$, unde $u = xe^y$ și $v = ye^x$.

5.104 Să se calculeze diferențialele de ordinul doi ale funcțiilor compuse:

$$1) F(x) = f(x^2, \ln x). \quad 2) F(x, y) = f\left(x^2, \frac{x}{y}\right).$$

$$3) F(x, y, z) = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

5.105 Să se găsească polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcției

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

în punctul $(1, 1)$.

R: Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcției f este:

$$\begin{aligned} T_3(x, y) = \sqrt{2} + \frac{1}{1!} \frac{1}{\sqrt{2}} [(x-1) + (y-1)] + \frac{1}{2!} \frac{1}{2\sqrt{2}} [(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2] - \\ - \frac{1}{3!} \frac{1}{4\sqrt{2}} [(x-1)^3 - (x-1)^2(y-1) - (x-1)(y-1)^2 + (y-1)^3]. \end{aligned}$$

5.106 Să se găsească polinomul Taylor de gradul n asociat funcției $f(x, y) = e^{x+y}$ în punctul $(1, -1)$.

R: Avem:

$$T_n(x, y) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} [(x-1) + (y+1)]^k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} (x-1)^{k-i} (y+1)^i.$$

5.107 Să se găsească o valoare aproximativă a numărului $(1, 1)^{1,2}$.

R: Polinomul Taylor de gradul 3 asociat funcției $f(x, y) = x^y$, $x > 0$, $y > 0$, în punctul $(1, 1)$ este:

$$T_3(x, y) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)] + \frac{1}{3!}[3(x-1)^2(y-1)].$$

Putem atunci scrie $f(1, 1; 1, 2) \approx T_3(1, 1; 1, 2) = 1,1021$.

5.108 Să se dezvolte polinomul

$$f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$$

după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $(1, 2)$.

R: Avem:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-2)^2 + \\ & + (x-1)^3 - 2(y-2)^3. \end{aligned}$$

5.109 Să se dezvolte polinomul

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $(-2, 1)$.

$$\mathbf{R}: f(x, y) = 1 - (x+2)^2 + 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$$

5.110 Să se dezvolte polinomul $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$ după formula lui Taylor în vecinătatea punctului $(1, 1, 1)$.

5.111 Se dă polinomul $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$. Să se dezvolte $f(x+k, y+h, z+\ell)$ după formula lui Taylor în vecinătatea punctului (x, y, z) .

5.112 Să se găsească polinoamele Taylor de gradul 3 asociate, în origine, funcțiilor:

$$1) f(x, y) = e^x \sin y. \quad 2) f(x, y) = \cos x \cos y.$$

$$\mathbf{R}: 1) T_3(x, y) = y + xy - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}x^2y. \quad 2) T_3(x, y) = 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

5.113 Să se găsească polinoamele Taylor de gradul 2 asociat funcției

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

în punctul $(1, 1)$.

R: Avem

$$T_3(x, y) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{1!} [(x-1) + (y-1)] + \frac{1}{2!} \frac{1}{2\sqrt{2}} [(x-1)^2 - 2(x-1)(y-1) + (y-1)^2].$$

5.114 Să se deducă formule aproximative (exacte până la termeni de gradul doi în x și y) pentru funcțiile:

$$1) f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-y}, \quad 2) f(x, y) = \sqrt{\frac{(1+x)^m + (1+y)^n}{2}},$$

dacă $|x|$ și $|y|$ sunt mici în comparație cu unitatea.

Capitolul 6

Funcții definite implicit

6.1 Funcții definite implicit de o ecuație

6.1 Să se arate că ecuația $F(x; y) = y^3 - xy^2 - xy + x^2 = 0$:

- 1) Admite o infinitate de soluții $y = f(x)$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.
- 2) Admite numai patru soluții continue $y = f(x)$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.
- 3) Există o vecinătate U a punctului $x_0 = 4$ și o vecinătate V a punctului $y_0 = 2$, în care ecuația $F(x; y) = 0$ admite o singură soluție $y = f(x)$, $f: U \rightarrow V$, continuă pe U , care satisface condiția $f(4) = 2$.

R: 1) Ecuația se mai scrie: $(y - x)(y^2 - x) = 0$. Deci, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, cu $0 \leq \alpha \leq \beta$, funcțiile $y = f(x)$, $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definite prin:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [\alpha, \beta), \\ \sqrt{x}, & \text{în rest,} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [\alpha, \beta), \\ x, & \text{în rest.} \end{cases}$$

2) Cele patru soluții continue pe $[0, \infty)$ sunt:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ \sqrt{x}, & x \in [1, \infty), \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \in [0, 1), \\ x, & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

3) Deoarece $F'_y(4; 2) = -8 \neq 0$, dacă luăm $U = (1, \infty)$ și $V = (1, \infty)$, funcția $f(x) = \sqrt{x}$ este continuă și $f(4) = 2$.

6.2 Să se arate că ecuația $F(x, y; z) = x^2 + y^2 - z^2 - 3xyz = 0$ admite numai două soluții $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$ continue și diferențiabile pe o vecinătate a punctului $(0, 1)$.

R: Ecuația $F(0, 1; z) = 1 - z^2 = 0$ are rădăcinile $z_1 = 1$ și $z_2 = -1$, iar $F'_z(x, y; z) = -(2z + 3xy)$, a.î. $F'_z(0, 1; 1) = -2$, $F'_z(0, 1; -1) = 2$. Deci există două funcții continue și diferențiabile pe o vecinătate a punctului $(0, 1)$ care satisfac condițiile $z_1(0, 1) = 1$ și respectiv $z_2(0, 1) = -1$. Derivatele lor parțiale sunt date de:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 3yz}{2z + 3xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y - 3xz}{2z + 3xy}.$$

Valorile lor în punctul $(0, 1)$ sunt:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}(0, 1) = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial z_1}{\partial y}(0, 1) = 1, \quad \frac{\partial z_2}{\partial x}(0, 1) = -\frac{3}{2}, \quad \frac{\partial z_2}{\partial y}(0, 1) = -1.$$

6.3 Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{d^2y}{dx^2}$ dacă

- 1) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$
- 2) $F(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0, \quad a \neq 0.$
- 3) $F(x, y) = x^2 + y^2 + \ln(x^2 + y^2) - a^2 = 0.$

R: 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ și $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}.$ 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2 + 1)(x^2 + y^2)}{(ax - y)^3}.$
 3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}.$

6.4 Să se calculeze $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ și $\frac{d^3y}{dx^3}$ dacă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

R: $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ și $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^6x}{a^4y^5}.$

6.5 Să se calculeze $\frac{dy}{dx}$ dacă $F(x, y) = y^x - y + 1 = 0.$

R: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln x}{1 - xy^{x-1}}.$

6.6 Ecuațiile:

- 1) $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0,$
- 2) $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos x + z \cos x - 1 = 0,$
- 3) $F(x, y, z) = x + y + z - e^z = 0,$
- 4) $F(x, y, z) = z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0,$

definesc funcții $z = z(x, y)$. Să se calculeze: $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}.$

R: 1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}.$
 2) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z \cos x - \cos y}{\cos x - y \sin z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \sin y - \cos z}{\cos x - y \sin z}.$
 3) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{e^z - 1}.$ 4) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y + ze^x}{2z - ye^z - e^x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xe^y + e^z}{2z - ye^z - e^x}.$

6.7 Ecuațiile:

$$1) xe^y + ye^x + ze^x = 1, \quad 2) x - z + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x} = 0, \quad 3) \sin xy - e^{xy} - x^2y = 0.$$

definesc funcții $z = z(x, y)$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\mathbf{R:} \quad 1) \frac{\partial z}{\partial x} = -y - z - e^{y-x}. \quad 2) \frac{\partial z}{\partial x} = 1. \quad 3) \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y(e^{xy} + 2x - \cos xy)}{x(e^{xy} + x - \cos xy)}.$$

6.8 Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și cele de ordinul al doilea ale funcției $z = z(x, y)$ definită de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

$$\mathbf{R:} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2x}{a^2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2y}{b^2z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2b^2z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2b^2z^3}.$$

6.9 Să se calculeze dz și d^2z dacă funcția $z = z(x, y)$ este definită de ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

$$\mathbf{R:} \quad dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy, \quad d^2z = \frac{y^2 - a^2}{z^3} dx^2 - 2\frac{xy}{z^3} dx dy + \frac{x^2 - a^2}{z^3} dy^2.$$

6.10 Să se calculeze dz și d^2z în punctul $(2, 0; 1)$ dacă funcția $z = z(x, y)$ este definită de ecuația:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

$$\mathbf{R:} \quad dz(2, 0) = 0, \quad d^2z(2, 0) = \frac{4}{15} (dx^2 + dy^2).$$

6.11 Funcția $z = z(x, y)$ este definită de ecuația $(y + z) \sin z - y(x + z) = 0$. Să se arate că

$$z \sin z \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{\sin z + y \cos z + z \cos z - y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin z - x - z}{\sin z + y \cos z + z \cos z - y}.$$

6.12 Funcția $z = z(x, y)$ este definită de ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, unde φ este o funcție derivabilă și a, b, c sunt constante. Să se arate că

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

6.13 Funcția $z = z(x, y)$ este definită de ecuația $F(x - az, y - bz) = 0$, unde F este o funcție diferențiabilă iar a și b sunt constante. Să se arate că

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

6.14 Ecuația $F(x + 2y, y - 2x) = 0$ definește funcția $y = y(x)$. Să se calculeze $y'(x)$ și $y''(x)$.

6.15 Ecuația $F(\sin x + y, \cos y + x) = 0$ definește funcția $y = y(x)$. Să se calculeze $y'(x)$ și $y''(x)$.

6.16 Ecuația

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) + \arcsin(ax + by + cz) = 1$$

definește funcția $z = z(x, y)$. Să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6.17 Ecuația $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ definește funcția $z = z(x, y)$. Să se arate că:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

6.18 Ecuația $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ definește funcția $z = z(x, y)$. Să se arate că:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

6.2 Funcții definite implicit de un sistem de ecuații

6.19 Sistemul

$$\begin{cases} F(x; y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ G(x; y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

definește funcțiile $y = y(x)$, $z = z(x)$. Să se calculeze $y'(x)$, $z'(x)$, $y''(x)$ și $z''(x)$.

R: Din sistemul: $x + yy' - zz' = 0$, $x + 2yy' + 3zz' = 0$, se obține: $y' = -\frac{4x}{5y}$, $z' = \frac{x}{5z}$.
Derivând din nou și înlocuind y' și z' , obținem:

$$y'' = -\frac{4}{25} \frac{5y^2 + 4x^2}{y^3}, \quad z'' = -\frac{1}{25} \frac{x^2 - 5z^2}{z^3}.$$

6.20 Sistemul

$$\begin{cases} F(x; y, z) = \cos x + \cos y + \cos z - a = 0, \\ G(x; y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - b = 0, \end{cases}$$

definește funcțiile $y = y(x)$, $z = z(x)$. Să se calculeze $y'(x)$, $z'(x)$.

R: Din sistemul: $\sin x + y' \sin y - z' \sin z = 0$, $x^2 + y^2 y' + z^2 z' = 0$, obținem:

$$y' = -\frac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{y^2 \sin z - z^2 \sin y}, \quad z' = -\frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}.$$

6.21 Sistemul $xyz = a$, $x + y + z = b$ definește funcțiile $y = y(x)$, $z = z(x)$. Să se calculeze dy , dz , d^2y și d^2z .

R: Din: $yzdx + xzdy + xydz = 0$ și $dx + dy + dz = 0$ se obține:

$$dy = -\frac{y(x-z)}{x(y-z)} dx, \quad dz = \frac{z(x-y)}{x(y-z)} dx,$$

$$d^2y = -d^2z = -2yz \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xz - xy - yz}{x^2(y-z)^3} dx^2.$$

6.22 Sistemul

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = u + v - x - y = 0, \\ G(x, y; u, v) = xu + yv - 1 = 0, \end{cases}$$

pentru $x \neq y$, definește pe u și v ca funcții de x și y . Să se calculeze derivatele parțiale ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$.

R: Pentru a calcula derivatele parțiale ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$, derivăm cele două ecuații în raport cu x și apoi cu y . Se obțin sistemele liniare:

$$\begin{cases} u_x + v_x = 1, \\ xu_x + yv_x = -u, \end{cases} \quad \begin{cases} u_y + v_y = 1, \\ xu_y + yv_y = -v, \end{cases}$$

al căror determinant este

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x \neq 0.$$

Aplicând regula lui Cramer se obține:

$$u_x = \frac{y+u}{y-x}, \quad v_x = -\frac{x+u}{y-x}, \quad u_y = \frac{y+v}{y-x}, \quad v_y = -\frac{x+v}{y-x}.$$

6.23 Sistemul

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = u - x - y = 0, \\ G(x, y; u, v) = uv - y = 0, \end{cases}$$

definește pe u și v ca funcții de x și y . Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$.

6.24 Sistemul

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = x + y + u + v - a = 0, \\ G(x, y; u, v) = x^3 + y^3 + u^3 + v^3 - b = 0, \end{cases}$$

definește pe u și v ca funcții de x și y . Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi și doi ale funcțiilor $u = u(x, y)$ și $v = v(x, y)$.

R: Obținem:

$$u_x = \frac{v^2 - x^2}{u^2 - v^2}, \quad v_x = \frac{x^2 - u^2}{u^2 - v^2}, \quad u_y = \frac{v^2 - y^2}{u^2 - v^2}, \quad v_y = \frac{y^2 - u^2}{u^2 - v^2}.$$

6.25 Sistemul

$$\begin{cases} F(x, y; u, v) = u + v - x = 0, \\ G(x, y; u, v) = u - yv = 0, \end{cases}$$

definește pe u și v ca funcții de x și y . Să se calculeze du , dv , d^2u și d^2v .

R: Din: $du + dv = dx$ și $du - y dv = v dy$, se obține:

$$du = \frac{1}{1+y} (y dx + v dy), \quad dv = \frac{1}{1+y} (dx - v dy),$$

$$d^2u = -d^2v = \frac{2}{(1+y)^2} (dx dy - v d^2y).$$

6.26 Sistemul $\varphi(u, v) = x$, $\psi(u, v) = y$ definește pe u și v ca funcții de x și y . Să se calculeze

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}.$$

R: Derivând cele două ecuații în raport cu x , obținem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Dacă $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$, obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}}.$$

6.27 Să se găsească z_x și z_y dacă:

$$1) x = u \cos v, y = u \sin v, z = cv. \quad 2) x = u + v, y = u - v, z = uv.$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) z_x = cv_x = -\frac{cy}{x^2 + y^2}, z_y = cv_y = \frac{cx}{x^2 + y^2}. \quad 2) z_x = \frac{1}{2}x, z_y = -\frac{1}{2}y.$$

6.3 Transformări punctuale

6.28 Fie $E = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^2$ și $F = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Să se arate că transformarea punctuală:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (r, \varphi) \in E,$$

este regulată pe E și să se determine inversa sa în vecinătatea punctului $\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \in E$.

R: Determinantul funcțional al transformării este

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \neq 0, \quad \forall (r, \varphi) \in E.$$

Deci în orice punct cu excepția originii, transformarea este regulată și inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

6.29 Fie $E = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$ și $F = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$. Să se arate că transformarea punctuală:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z,$$

este regulată pe E și să se determine inversa sa în vecinătatea punctului $(1, \frac{\pi}{4}, 0) \in E$.

R: Determinantul funcțional al transformării este

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \neq 0, \quad \forall (r, \varphi, z) \in E.$$

Deci în orice punct cu excepția celor de pe axa Oz este regulată și inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

6.30 Fie $E = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbf{R}^3$ și $F = \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, z), z \in \mathbf{R}\}$. Să se arate că transformarea punctuală:

$$x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad (r, \varphi, \theta) \in E,$$

este regulată pe E și să se determine inversa sa în vecinătatea punctului $(1, \frac{\pi}{4}, 0) \in E$.

R: Determinantul funcțional al transformării este

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \neq 0.$$

Deci în orice punct cu excepția celor de pe axa Oz este regulată și inversa ei este

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

6.31 Se dă transformarea punctuală $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită prin:

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2.$$

- 1) Să se găsească imaginea mulțimii $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ prin transformarea \mathbf{f} .
- 2) Să se arate că transformarea \mathbf{f} este regulată într-o vecinătate a punctului $(1, 1)$.
- 3) Să se găsească inversa transformării \mathbf{f} .

R: 1) $F = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 \mid u + v > 0, u - v > 0\}$. 2) $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}(1, 1) = -8 \neq 0$. 3) Inversa transformării **f** este:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u+v}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u-v}.$$

6.32 Să se arate că transformarea punctuală $\mathbf{f} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită prin:

$$u = \sin(x+y), \quad v = y^3,$$

nu este regulată pe mulțimea $D = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\mathbf{R}: \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 3y^2 \cos(x+y) = 0 \text{ pentru } y = 0 \text{ sau } x+y = \pm \frac{\pi}{2}.$$

6.33 Să se arate că transformarea:

$$x = \cos \varphi \cos \psi, \quad y = \cos \varphi \sin \psi,$$

este regulată pe mulțimea $E = \{(\varphi, \psi) \mid 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \psi \in \mathbf{R}\}$. Să se calculeze:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

în punctul $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, imaginea prin transformarea dată a punctului $(\varphi_0, \psi_0) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

R: Determinantul funcțional al transformării este

$$\frac{D(x, y)}{D(\varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} -\sin \varphi \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi \\ -\sin \varphi \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi \end{vmatrix} = -2 \sin \varphi \cos \varphi \neq 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in E.$$

Inversa transformării este: $\varphi = \arccos \sqrt{x^2 + y^2}$, $\psi = \arctg \frac{y}{x}$, iar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -1.$$

6.34 Fie transformarea: $x = r \cos \varphi \sin \psi$, $y = r \sin \varphi \sin \psi$, $z = r \cos \psi$, $(r, \varphi, \psi) \in \mathbf{R}^3$.

1) Să se determine punctele în care transformarea este regulată.

2) Să se calculeze jacobianul transformării inverse și derivatele r_{xx} , φ_{yy} , ψ_{zz} în punctul $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 0)$.

R: 1) Jacobianul transformării este:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \psi & -r \sin \varphi \sin \psi & r \cos \varphi \cos \psi \\ \sin \varphi \sin \psi & r \cos \varphi \sin \psi & r \sin \varphi \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -r \sin \psi \end{vmatrix} = -r^2 \sin \psi.$$

Transformarea este regulată dacă $r \neq 0$ și $\psi \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

2) Jacobianul transformării inverse în punctul $(0, 1, 0)$ este:

$$\frac{D(r, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)}(0, 1, 0) = \frac{1}{\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)}\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

Transformarea inversă este:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \psi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Iar: $r_{xx}(0, 1, 0) = 1$, $\varphi_{yy}(0, 1, 0) = 0$, $\psi_{zz}(0, 1, 0) = -1$.

6.4 Dependență și independență funcțională

6.35 Să se arate că funcțiile:

- 1) $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $h(x, y, z) = xy + xz + yz$.
- 2) $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = x - y + z$, $h(x, y, z) = 4xy + 4yz$.

sunt funcțional dependente pe \mathbf{R}^3 .

R: 1) Matricea funcțională

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ y + z & x + z & x + y \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este: $g = f^2 - 2h$.

2) Matricea funcțională

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4y & 4x + 4z & 4y \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este: $h = f^2 - g^2$.

6.36 Să se arate că funcțiile:

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$g(x, y, z) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + z \right),$$

sunt funcțional independente pentru $x > 0, y > 0, z > 0$.

R: Matricea funcțională

$$\begin{bmatrix} \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + z\right)^2} & \frac{-\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + z\right)^2} & \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + z\right)^2} \end{bmatrix}$$

are rangul 2.

6.37 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x + y + z, \\ g(x, y, z) &= x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz, \\ h(x, y, z) &= xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x), \end{aligned}$$

sunt funcțional dependente pe \mathbf{R}^3 și să se găsească relația de dependență funcțională.

R: Matricea funcțională

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x^2 + 6yz & 3y^2 + 6xz & 3z^2 + 6xy \\ y^2 + z^2 + 2x(y + z) & z^2 + x^2 + 2y(z + x) & x^2 + y^2 + 2z(x + y) \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este: $f^3 = g + 3h$.

6.38 Dacă funcțiile f, g, h sunt derivabile și inversabile, atunci funcțiile: $u = f\left(\frac{y}{z}\right)$, $v = g\left(\frac{z}{x}\right)$, $w = h\left(\frac{x}{y}\right)$, definite pe $D = \mathbf{R} \setminus \{(0, 0, 0)\}$, sunt funcțional dependente pe D .

R: Matricea funcțională

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{z}f' & -\frac{y}{z^2}f' \\ -\frac{z}{x^2}g' & 0 & \frac{1}{x}g' \\ \frac{1}{y}h' & -\frac{x}{y^2}h' & 0 \end{bmatrix}$$

are rangul mai mic decât 3.

6.39 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xy - z, \\ g(x, y, z) &= xz + y, \\ h(x, y, z) &= (x^2 + 1)(y^2 + z^2) - (x^2 - 1)yz - x(y^2 - z^2), \end{aligned}$$

sunt funcțional dependente pe \mathbf{R}^3 și să se găsească relația de dependență funcțională.

R: Matricea funcțională are rangul mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este:

$$h = f^2 - fg + g^2.$$

6.40 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_2 - x_3, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_4^2, \end{aligned}$$

sunt funcțional dependente pe \mathbf{R}^4 .

R: Rangul matricei funcționale este mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este:

$$f_2 + f_3 = f_1^2.$$

6.41 Să se arate că funcțiile:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 + x_2 + \dots + x_n, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

sunt funcțional dependente pe \mathbf{R}^4 .

R: Rangul matricei funcționale este mai mic decât 3. Relația de dependență funcțională este:

$$f_2 + 2f_3 = f_1^2.$$

6.5 Schimbări de variabile

6.42 Să se efectueze schimbarea de variabilă independentă $x = \frac{1}{t}$ în ecuația:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2} y = 0.$$

R: Deoarece: $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} = -t^2$ și $\frac{d^2 t}{dx^2} = \frac{2}{x^3} = 2t^3$, avem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = -t^2 \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2 t}{dx^2} = t^4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt}$$

și deci ecuația devine: $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$.

6.43 Să se efectueze schimbarea de variabilă independentă indicată în următoarele ecuații pentru funcția $y = y(x)$:

$$\begin{aligned} 1) \quad x^2 y'' - 2y &= x^2 + \frac{1}{x}, & x &= e^t. \\ 2) \quad x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y &= x^3 + 3x, & x &= e^t. \\ 3) \quad (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + y &= 0, & x &= \operatorname{tg} t. \\ 4) \quad (1+x)^3 y'' + 3(1+x)^2 y' + (1+x)y &= \ln(1+x), & x &= e^t - 1. \\ 5) \quad (1-x^2) y'' - xy' + y &= 0, & x &= \cos t. \end{aligned}$$

R: Notăm $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$. Se obține: 1) $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = e^{2t} + e^{-t}$,

2) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = e^{3t} + 3e^t$. 3) $\ddot{y} + \dot{y} = 0$. 4) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = te^{-t}$.

5) $\ddot{y} + \dot{y} = 0$.

6.44 Să se efectueze schimbarea variabilei independente în următoarele ecuații pentru funcția $y = y(x)$, luând drept nouă variabilă independentă funcția $t = t(x)$ indicată:

$$\begin{aligned} 1) & (1+x)^2 y'' + (1+x)y' + y = 4 \cos [\ln(1+x)], \quad t = \ln(1+x). \\ 2) & x(1+x^2)y'' - (1-x^2y\sqrt{1+x^2})y' - 3x^3y^2 = 0, \quad t = \sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

R: 1) Notăm $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$. Se obține: 1) $\ddot{y} + \dot{y} = 4 \cos t$. 2) $\ddot{y} + y\dot{y} - y^2 = 0$.

6.45 Funcția $y = y(x)$ verifică ecuația

$$x^2 y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 4x.$$

Să se găsească ce devine această ecuație dacă se efectuează schimbarea de variabilă dependentă $y = \frac{1}{x^2} z$, unde $z = z(x)$.

R: $z'' - z = 4x$.

6.46 Să se efectueze schimbarea de variabile independente indicată în următoarele ecuații pentru funcția $z = z(x, y)$:

$$\begin{aligned} 1) & y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \quad v = x^2 + y^2. \\ 2) & x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad u = x, \quad v = \frac{x}{y}. \\ 3) & x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad u = \ln x, \quad v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}). \\ 4) & (x+y) \frac{\partial z}{\partial x} - (x-y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad v = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

R: 1) $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$. 2) $u \frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$. 3) $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^{u \operatorname{sh} v}$. 4) $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0$.

6.47 Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ în ecuația lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obține:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

6.48 Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ în ecuația:

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: Se obține: $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = 0$.

6.49 Să se efectueze schimbarea de variabile independente indicată în următoarele ecuații pentru funcția $z = z(x, y)$:

- 1) $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = xy, \quad v = \frac{x}{y}.$
- 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \quad u = ax + y, \quad v = -ax + y.$
- 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad u = 3x + y, \quad v = x + y.$

R: 1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}.$ 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$ 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

6.50 Să se efectueze schimbarea de variabile independente $u = \sin x + x - y, \quad v = x - \sin x + y,$ în ecuația:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$

6.51 Să se efectueze schimbarea de variabile independente $u = x^2 - y^2, \quad v = \frac{y}{x},$ în ecuația:

$$xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

R: $u \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$

6.52 Să se efectueze schimbarea de variabile independente $x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$ în ecuația:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

R: Din $\frac{\sin \theta \cdot dr + r \cos \theta \cdot d\theta}{\cos \theta \cdot dr - r \sin \theta \cdot d\theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta},$ se obține: $\frac{dr}{d\theta} = r.$

6.53 Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad w = \ln z - (x + y),$ în ecuația:

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y - x)z.$$

R: Se obține: $\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$

6.54 Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x, \quad v = \frac{1}{y}, \quad w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x},$ în ecuația:

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2.$$

R: Se obține: $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

6.55 Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x + y$, $v = \frac{x}{y}$, $w = \frac{z}{x}$, în ecuația:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obține: $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0$.

6.56 Să se efectueze schimbarea de variabile $u = x + y$, $v = x - y$, $w = xy - z$, în ecuația:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

R: Se obține: $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$.

Capitolul 7

Extreme pentru funcții de mai multe variabile

7.1 Puncte de extrem pentru funcții de mai multe variabile

7.1 Să se determine punctele de extrem ale funcțiilor:

- 1) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$. 2) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
3) $f(x, y) = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$. 4) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

R: 1) Punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y^2 - 5) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6(xy - 2) = 0,$$

adică: $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$. Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

În punctul $(2, 1)$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(2, 1)$ este un punct de minim, $f(2, 1) = -28$. În punctul $(-2, -1)$, $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$, $(-2, -1)$ este un punct de maxim, $f(-2, -1) = 28$. În punctele $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $\Delta_2 = -108 < 0$. Nu sunt puncte de extrem.

2) Un punct staționar: $(0, 3)$. $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$. Punctul $(0, 3)$ este un punct de minim și $f_{\min} = f(0, 3) = -9$.

3) Un punct staționar: $(21, 20)$. $\Delta_1 = -\frac{2}{3} < 0$, $\Delta_2 = \frac{47}{144} > 0$. Punctul $(21, 20)$ este un punct de maxim și $f_{\max} = f(21, 20) = 282$.

4) Un punct staționar: $(0, 0)$, $(-1, -1)$. Punctul $(0, 0)$ nu este punct de extrem. Punctul $(-1, -1)$ este un punct de maxim și $f_{\max} = f(-1, -1) = 1$.

7.2 Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

R: Punctele staționare sunt soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^3} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2} = 0.$$

Se obține un singur punct staționar $(5, 2)$. Derivatele de ordinul doi sunt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}.$$

Deci $\Delta_1 = \frac{4}{5} > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$. Punctul $(5, 2)$ este un punct de minim și
 $f_{\min} = f(5, 2) = 30$.

7.3 Să se găsească extremele funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= (x-1)^2 + 2y^2. & 2) \quad z &= x^2 + xy + y^2 - 2x - y. \\ 3) \quad z &= (x-1)^2 - 2y^2. & 4) \quad z &= x^3 y^2 (6-x-y), \quad x > 0, \quad y > 0. \\ 5) \quad z &= xy \sqrt{1 - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}}. & 6) \quad z &= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2. \\ 7) \quad z &= 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}. & 8) \quad z &= (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

R: 1) $z_{\min} = z(1, 0) = 0$. 2) $z_{\min} = z(1, 0) = -1$ 3) Nu are extreme.

4) $z_{\max} = z(3, 2) = 108$.

5) Puncte staționare: $(0, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3})$, $(\pm\sqrt{3}, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, -1)$.

Extreme: $z_{\max} = z(1, 1) = z(-1, -1) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $z_{\min} = z(1, -1) = z(-1, 1) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

6) $z_{\min} = z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$. 7) $z_{\max} = z(0, 0) = 1$.

8) $z_{\min} = z(0, 0) = 0$. In punctele cercului $x^2 + y^2 = 1$, $z_{\max} = \frac{1}{e}$.

7.4 Să se găsească extremele funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) \quad z &= \frac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & 2) \quad z &= (x^2 + y^2) e^{2x+3y}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \\ 3) \quad z &= x^3 + y^3 - 9xy + 27. & 4) \quad z &= \sin x + \sin y + \cos(x+y), \quad x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \\ 5) \quad z &= x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 - 8x + 8y. \end{aligned}$$

R: 1) $z_{\max} = z(1, -1) = \sqrt{3}$. 2) $z_{\min} = z(0, 0) = 0$.

3) $(0, 0)$ nu este punct de extrem, $z_{\min} = z(3, 3) = 0$.

4) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nu este punct de extrem, $z_{\max} = z\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$.

5) $z_{\min} = z(1, -1) = -12$.

7.5 Să se găsească extremele funcțiilor:

- 1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
- 2) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
- 3) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, $x, y, z \in (0, \pi)$.

R: 1) Un punct staționar: $(-1, -2, 3)$. $d^2f(-1, -2, 3) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ este o formă pătratică pozitiv definită și deci punctul $(-1, -2, 3)$ este un punct de minim, $f_{\min} = f(-1, -2, 3) = -14$.

2) Două puncte staționare: $(0, 0, -1)$, $(24, -144, -1)$. Însă

$$d^2f(x, y, z) = 6x dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24 dx dy,$$

iar: $d^2f(0, 0, -1) = 2dy^2 + 2dz^2 + 24 dx dy = 2(dy + 6dx)^2 - 72dx^2 + 2dz^2$, formă pătratică nedefinită, deci $(0, 0, -1)$ nu este punct de extrem,

$$d^2f(24, -144, -1) = 144dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24 dx dy = (12dx + dy)^2 + dx^2 + 2dz^2,$$

formă pătratică pozitiv definită și deci punctul $(24, -144, -1)$ este un punct de minim, $f_{\min} = f(24, -144, -1) = -6913$.

$$3) f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 4.$$

7.2 Extreme pentru funcții definite implicit

7.6 Să se găsească extremele următoarelor funcții $z = f(x, y)$, definite implicit prin ecuațiile:

- 1) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.
- 2) $F(x, y, z) = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0$.

R: 1) Sistemul:

$$F_x = 2x - 2 = 0, F_y = 2y + 4 = 0, F = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0,$$

are soluțiile: $(1, -2; -2)$ și $(1, -2; 8)$. Ecuația $F(x, y, z) = 0$ definește două funcții: $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$.

Pentru $z = z_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{F_{xx}(1, -2; -2)}{F_z(1, -2; -2)} = \frac{1}{5}, \quad A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, -2; -2)}{F_z(1, -2; -2)} = 0, \\ A_{22} &= -\frac{F_{yy}(1, -2; -2)}{F_z(1, -2; -2)} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

și deci $\Delta_1 = \frac{1}{5} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{25} > 0$, deci $(1, -2)$ este un punct de minim, $z_{\min} = z_1(1, -2) = -2$.

Pentru $z = z_2(x, y)$:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1, -2; 8)}{F_z(1, -2; 8)} = -\frac{1}{5}, \quad A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, -2; 8)}{F_z(1, -2; 8)} = 0, \quad A_{22} = -\frac{F_{yy}(1, -2; 8)}{F_z(1, -2; 8)} = -\frac{1}{5}$$

și deci $\Delta_1 = -\frac{1}{5} < 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{25} > 0$, deci $(1, -2)$ este un punct de maxim, $z_{\max} = z_2(1, -2) = 8$.

2) Sistemul:

$$F_x = 3x^2 - 3 = 0, F_y = -2y + 4 = 0, F = x^3 - y^2 + z^2 - 3x + 4y + z - 8 = 0,$$

are soluțiile: $(1, 2; 2)$, $(-1, 2; 1)$, $(1, 2; -3)$, $(-1, 2; -2)$. Ecuația $F(x, y; z) = 0$ definește două funcții: $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$, fiecare având câte două puncte staționare.

Pentru $z = z_1(x, y)$, în primul punct:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = -\frac{6}{5}, A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = 0, A_{22} = -\frac{F_{yy}(1, 2; 2)}{F_z(1, 2; 2)} = \frac{2}{5}$$

și deci $\Delta_1 = -\frac{6}{5} < 0$, $\Delta_2 = -\frac{12}{25} < 0$, deci $(1, 2)$ nu este un punct de extrem. În punctul al doilea:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = 2, A_{12} = -\frac{F_{xy}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = 0, A_{22} = -\frac{F_{yy}(-1, 2; 1)}{F_z(-1, 2; 1)} = \frac{2}{3}.$$

Deci $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$, deci $(-1, 2)$ este un punct de minim, $z_{\min} = z_1(-1, 2) = 1$.

Pentru $z = z_2(x, y)$, în primul punct:

$$A_{11} = -\frac{F_{xx}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = \frac{6}{5}, A_{12} = -\frac{F_{xy}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = 0, A_{22} = -\frac{F_{yy}(1, 2; -3)}{F_z(1, 2; -3)} = -\frac{2}{5}$$

și deci $\Delta_1 = \frac{6}{5} > 0$, $\Delta_2 = -\frac{12}{25} < 0$, deci $(1, 2)$ nu este un punct de extrem. În punctul al doilea:

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\frac{F_{xx}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = -2, A_{12} = -\frac{F_{xy}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = 0, \\ A_{22} &= -\frac{F_{yy}(-1, 2; -2)}{F_z(-1, 2; -2)} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

și deci $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = \frac{4}{3} > 0$, deci $(-1, 2)$ este un punct de minim, $z_{\max} = z_1(-1, 2) = -2$.

7.7 Să se găsească extremele următoarelor funcții $z = f(x, y)$, definite implicit prin ecuațiile:

$$\begin{aligned} 1) F(x, y; z) &= \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} - 1 = 0. \\ 2) F(x, y; z) &= \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} + 1 = 0. \end{aligned}$$

R: 1) Sistemul $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F = 0$, are soluțiile $(0, 0; -\sqrt{3})$, $(0, 0; \sqrt{3})$.

Ecuația $F(x, y; z) = 0$ definește două funcții: $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$, $z_{\min} = z_1(0, 0) = -\sqrt{3}$, $z_{\max} = z_2(0, 0) = \sqrt{3}$.

2) Sistemul $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F = 0$, are soluțiile $(0, 0; -5)$, $(0, 0; 5)$.

Ecuația $F(x, y; z) = 0$ definește două funcții: $z = z_1(x, y)$ și $z = z_2(x, y)$, $z_{\min} = z_1(0, 0) = 5$, $z_{\max} = z_2(0, 0) = -5$.

7.8 Să se găsească extremele următoarelor funcții $z = f(x, y)$, definite implicit prin ecuațiile:

- 1) $F(x, y, z) = 4xy - z^2 - 4x - 4y + 8 = 0.$
- 2) $F(x, y, z) = 5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0.$

R: 1) Sistemul $F_x = 0, F_y = 0, F = 0$, are soluțiile $(0, 0; -2), (0, 0; 2).$

7.3 Extreme condiționate

7.9 Să se găsească extremele condiționate ale următoarelor funcții:

- 1) $z = xy$, pentru $x + y - 1 = 0.$
- 2) $z = x + 2y$, pentru $x^2 + y^2 - 5 = 0.$
- 3) $z = x^2 + y^2$, pentru $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$
- 4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, pentru $y - x = \frac{\pi}{4}.$
- 5) $z = x^2 + y^2$, pentru $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$
- 6) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, pentru $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}.$

R: 1) Construim funcția lui Lagrange: $L(x, y; \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1).$ Sistemul:

$$L_x = y + \lambda = 0, \quad L_y = x + \lambda = 0, \quad L_\lambda = x + y - 1 = 0$$

are soluția: $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}, \lambda_0 = -\frac{1}{2}.$ Fie $\Phi(x, y) = L(x, y; -\frac{1}{2}) = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1).$
Atunci

$$d^2\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = dx dy.$$

Însă $dx + dy = 0$ și deci $d^2\Phi\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -dx^2 < 0.$ $z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

$$2) z_{\max} = z(1, 2) = 5, \quad z_{\min} = z(-1, -2) = -5.$$

$$3) z_{\min} = z\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right) = \frac{36}{13}.$$

$$4) z_{\max} = z\left(\frac{7\pi}{8} + k\pi, \frac{9\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2},$$

$$z_{\min} = z\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{5\pi}{8} + k\pi\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

$$5) z_{\min} = z\left(\frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \frac{a^2b}{a^2 + b^2}\right) = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

$$6) z_{\max} = z(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = 4a^2, \quad z_{\min} = z(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = 4a^2.$$

7.10 Să se găsească extremele condiționate ale următoarelor funcții:

- 1) $z = xy$, pentru $2x + 3y - 5 = 0.$
- 2) $z = x^2 + y^2$, pentru $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9.$
- 3) $z = 6 - 4x - 3y$, pentru $x^2 + y^2 = 1.$
- 4) $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, pentru $x - y = \frac{\pi}{4}, x, y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$

R: Avem:

- 1) $L(x, y; \lambda) = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$, $\lambda = -\frac{5}{3}$, $z_{\max} = z\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}$.
- 2) $\lambda_1 = -\frac{5}{3}$, $z_{\max} = z\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = 25$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$,
 $z_{\min} = z\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$.
- 3) $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$, $z_{\max} = z\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 11$, $\lambda_2 = \frac{5}{2}$, $z_{\min} = z\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 1$.
- 4) $z_{\max} = z\left(\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) = 1$.

7.11 Să se găsească extremele condiționate ale următoarelor funcții:

- 1) $u = x - 2y + 2z$, pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.
- 2) $u = x^2 + y^2 + z^2$, pentru $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > b > c$.
- 3) $u = xy^2z^3$, pentru $x + 2y + 3z = 6$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
- 4) $u = xy + xz + yz$, pentru $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.
- 5) $u = x + y + z$, pentru $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

R: Avem:

- 1) $u_{\min} = u(-1, 2, -2) = -9$, $u_{\max} = u(1, -2, 2) = 9$.
- 2) $u_{\max} = u(\pm a, 0, 0) = a$, $u_{\min} = u(0, 0, \pm c) = c$.
- 3) $u_{\max} = u(1, 1, 1) = 1$.
- 4) $u_{\min} = u(1, 1, 1) = 3$.
- 5) $u_{\min} = u(3, 3, 3) = 9$.

7.12 Să se găsească extremele condiționate ale următoarelor funcții:

- 1) $u = xyz$, pentru $x + y + z = 5$, $xy + xz + yz = 8$, $x \geq y \geq z > 0$.
- 2) $u = xyz$, pentru $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R: 1) Funcția lui Lagrange:

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x + y + z - 5) + \mu(xy + xz + yz - 8),$$

are punctele staționare: $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}; \frac{16}{9}, -\frac{4}{3}\right)$ și $(2, 2, 1; 4, -2)$.

$$u_{\max} = u\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27}, u_{\min} = u(2, 2, 1) = 4.$$

$$2) u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}, u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

7.13 Să se găsească extremele condiționate ale următoarelor funcții:

- 1) $u = x^4 + y^4 + z^4$, pentru $x + y + z = 3$.
- 2) $u = x^3 + y^3 + z^3$, pentru $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

7.14 Să se determine dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic a.î.:

- 1) Aria totală să fie egală cu $2a^2$ și volumul maxim.
- 2) Suma celor trei dimensiuni egală cu a și aria totală maximă.
- 3) Volumul egal cu a^3 și aria totală minimă.

R: Avem:

$$1) \mathcal{V}_{\max} = \mathcal{V} \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}} \right) = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}.$$

$$2) \mathcal{A}_{\max} = \mathcal{A} \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3} \right) = \frac{2}{3}a^2.$$

$$3) \mathcal{A}_{\min} = \mathcal{A}(a, a, a) = 6a^2.$$

Capitolul 8

Șiruri și serii de funcții

8.1 Șiruri de funcții reale

8.1 Se dă șirul de funcții (f_n) , $f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{nx^2}{2}}$. Să se determine mulțimea de convergență și funcția limită.

R: Deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

rezultă că mulțimea de convergență este $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, iar funcția limită: $f(x) = 0$.

8.2 Să se arate că șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^2}{n+1}$, $x \in \mathbf{R}$, este simplu convergent pe \mathbf{R} către $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\frac{x^2}{n+1} < \varepsilon$ d.d. $n > \frac{x^2 - \varepsilon}{\varepsilon}$. Deci

$$N(\varepsilon, x) = \begin{cases} \left\lceil \frac{x^2 - \varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil, & \text{dacă } \varepsilon < x^2, \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon \geq x^2. \end{cases}$$

8.3 Să se arate că șirul de funcții $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2 + 1}$, $x \in [0, \pi]$, este uniform convergent către $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\left| \frac{\cos nx}{n^2 + 1} \right| < \varepsilon$ dacă $\frac{1}{n^2 + 1} < \varepsilon$, adică d.d. $n^2 > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}$. Deci

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \left\lceil \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil, & \text{dacă } \varepsilon < 1, \\ 0, & \text{dacă } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$

8.4 Să se arate că șirul de funcții $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $x \in \mathbf{R}$ cu $\alpha > 0$, este uniform convergent pe \mathbf{R} către $f(x) = 0$.

R: Intr-adevăr, $\left| \frac{\sin nx}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$.

8.5 Să se arate că șirul de funcții $f_n(x) = \frac{1}{ne^{nx}}$, $x \in [0, \infty)$, este uniform convergent pe $[0, \infty)$ către $f(x) = 0$.

R: Pentru $x \geq 0$, $e^{nx} \geq 1$ și deci $0 < f_n(x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

8.6 Se dă șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x^2}{n^2 + x^4}$, $x \in [1, \infty)$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Să se arate că șirul de funcții (f_n) este uniform convergent pe $[1, \infty)$ către f .

R: $0 < f_n(x) = \frac{2nx^2}{n^2 + x^4} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

8.7 Se dă șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$, $x \in (0, \infty)$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Să se arate că șirul de funcții (f_n) nu este uniform convergent pe $(0, \infty)$ către f .

R: $f(x) = 0$, însă pentru $x_n = n$, $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$.

8.8 Se dă șirul de funcții $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$, $x \in [3, 4]$. Să se arate că șirul de funcții (f_n) este uniform convergent pe $[3, 4]$ către funcția $f(x) = 0$, $x \in [3, 4]$.

R: Pentru $3 \leq x \leq 4$, avem: $0 < f_n(x) \leq \frac{4}{n+3} < \frac{4}{n} \rightarrow 0$.

8.9 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n(x) = \frac{x^3}{x^3 + n^3}$, nu este uniform convergent pe $(0, \infty)$.

R: $f(x) = 0$, însă pentru $x_n = n$, $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$.

8.10 Se dă șirul de funcții (f_n) , $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin: $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$. Să se arate că mulțimea de convergență a șirului este $A = (-1, 1)$, însă șirul nu este uniform convergent pe $(-1, 1)$. Să se găsească o mulțime de convergență uniformă.

R: Deoarece, $f_n(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{x-1}$, pentru $x \neq 1$, rezultă că $f_n(x)$ este divergent pentru $|x| > 1$, este convergent pentru $|x| < 1$. Apoi, $f_n(1) = n \rightarrow \infty$, $f_n(-1) =$

$\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ este un șir divergent. Deci mulțimea de convergență a șirului este $A = (-1, 1)$ și funcția limită este $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Dacă șirul ar fi uniform convergent pe $(-1, 1)$, pentru orice $\varepsilon > 0$ ar exista un $N(\varepsilon)$ a.î. $\left| \frac{x^{n+1}}{x-1} \right| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$ și orice $x \in (-1, 1)$, inegalitate echivalentă cu:

$$n+1 > \frac{1}{\ln \frac{1}{|x|}} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln |x-1| \right), \text{ dar } \sup_{|x|<1} \left(\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|x|}} + \frac{\ln \frac{1}{|x-1|}}{\ln \frac{1}{|x|}} \right) = +\infty.$$

Pentru orice interval $[-a, a] \subset (-1, 1)$, putem lua

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{|a|}} \right\rceil$$

și deci șirul (f_n) este uniform convergent pe orice interval $[-a, a] \subset (-1, 1)$.

8.11 Se dă șirul de funcții (f_n) , $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin: $f_n(x) = 1 + x^{2n}$.

- 1) Să se găsească mulțimea de convergență a șirului și funcția limită.
- 2) Să se arate că șirul nu este uniform convergent pe $(-1, 1)$.
- 3) Să se găsească o mulțime de convergență uniformă.

R: 1) $A = [-1, 1]$, iar funcția limită este:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 2, & x \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

3) Șirul (f_n) este uniform convergent pe orice interval $[-a, a] \subset (-1, 1)$.

8.12 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k^3},$$

este uniform convergent pe \mathbf{R} , iar limita sa este o funcție continuă cu derivată continuă pe \mathbf{R} .

R: Aplicăm criteriul lui Cauchy:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^3} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k)^2} < \sum_{k=1}^p \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} < \frac{1}{n}.$$

Analog se arată că șirul (f'_n) , $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2}$, este uniform convergent pe \mathbf{R} . Deci

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\cos kx}{k^2}.$$

8.13 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , definite prin $f_n(x) = x \operatorname{arctg}(nx)$, este uniform convergent pe $[0, \infty)$.

R: Aplicăm criteriul lui Cauchy:

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= x \cdot |\operatorname{arctg}((n+p)x) - \operatorname{arctg}(nx)| = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{1 + (n+p)nx^2} < \\ &< x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{(n+p)nx^2} \leq x \cdot \frac{p}{(n+p)nx} = \frac{p}{(n+p)n} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

8.14 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , definite prin $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$, converge uniform pe \mathbf{R} către funcția $f(x) = 0$.

R: Se va observa că $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

8.15 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , definite prin $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n+1}$, $x \in [0, \pi]$, este uniform convergent către funcția $f(x) = 0$ și că deși funcțiile f_n și f sunt derivabile pe $[0, \pi]$, șirul derivatelor $f'_n(x) = \frac{n}{n+1} \sin 2nx$ nu este convergent pe $[0, \pi]$.

R: Intr-adevăr, pentru $x = \frac{\pi}{4}$ șirul $f'_n\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este divergent.

8.16 Se dă șirul de funcții (f_n) , $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Să se cerceteze dacă se poate aplica șirului (f_n) teorema de derivare termen cu termen.

R: Șirul este convergent pe $[-1, 1]$ la funcția $f(x) = 0$. Șirul derivatelor:

$$f'_n(x) = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \text{ are } \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \end{cases}$$

și nu este uniform convergent pe $[-1, 1]$. Deci nu se poate aplica șirului (f_n) teorema de derivare termen cu termen.

8.17 Se dă șirul (f_n) , $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} x^n$, $x \in \mathbf{R}$. Să se arate că:

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

R: Deoarece mulțimea valorilor funcției $\operatorname{arctg} x$ este intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$ și deci:

$$0 \leq |f_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arctg} x^n \right| < \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2},$$

de unde deducem că șirul este convergent pe \mathbf{R} la funcția $f(x) = 0$ și deci: $f'(1) = 0$. Pe de altă parte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}} \right]_{x=1} = \frac{1}{2}.$$

8.18 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin: $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ este convergent, însă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^n} \right) = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

8.19 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin: $f_n(x) = n^2 x^3 e^{-n^2 x^3}$ este convergent, însă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3e^{n^2}} \right) = \frac{1}{3}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

8.20 Să se arate că șirul de funcții (f_n) , $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definite prin: $f_n(x) = nx(1-x)^n$ nu este uniform convergent pe $[0, 1]$, totuși

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

R: Șirul este convergent pe $[0, 1]$ la funcția $f(x) = 0$. Dar, pentru $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$,

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0,$$

deci convergența nu este uniformă. Pe de altă parte:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \int_0^1 x(1-x)^n dx = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

8.2 Serii de funcții

8.21 Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de funcții:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x} \right)^n. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R}. \quad 3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n.$$

R: 1) Aplicăm criteriul rădăcinii: $A = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 2) Aplicăm criteriul rădăcinii: $A = \mathbf{R} \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}, \forall \alpha \in \mathbf{R}$. Pentru $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, obținem seria armonică generalizată, convergentă dacă $\alpha > 1$, iar pentru $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, obținem seria armonică generalizată alternantă, convergentă dacă $\alpha > 0$. 3) Aplicând criteriul raportului obținem o serie convergentă pentru: $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Pentru $x = 0$ seria este de asemenea convergentă. Deci $A = \mathbf{R}$.

8.22 Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de funcții:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1} \left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n^3+n+1)^\alpha} \frac{1}{\ln(n^2+1)} \cdot (x^3-2x)^n,$$

$\alpha \in \mathbf{R}$.

R: 1) Din $\left|\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right| < 1$ rezultă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Pentru $x = \pm 1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Deci: $A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. 2) Din $|x^3-2x| < 1$ rezultă că seria este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ pentru:

$$x \in \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Pentru $x \in \left\{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right\}$ seria este convergentă dacă $\alpha \geq \frac{1}{6}$, iar pentru $x \in \left\{-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$ seria este convergentă dacă $\alpha > \frac{1}{2}$.

8.23 Să se determine mulțimea de convergență a următoarelor serii de funcții:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{3^n} \cdot \sqrt{n^2+1}} \operatorname{tg}^n x. \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+n+1} \left(\frac{4x-1}{x+3}\right)^n.$$

$$\mathbf{R}: 1) A = \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]. \quad 2) \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right].$$

8.24 Să se studieze convergența următoarelor serii de funcții, pe mulțimile indicate:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}, \quad x \in [\alpha, 2\pi - \alpha], \quad \alpha \in (0, \pi). \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{x^2+n}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

R: Din criteriul lui Dirichlet rezultă că seriile sunt uniform convergente pe mulțimile indicate.

8.25 Să se studieze convergența următoarelor serii de funcții, definite pe \mathbf{R} :

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{1+n^3 x^4}, \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{2x}{x^2+n^4}. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] \frac{\cos nx}{n+1}.$$

R: 1) Din $(1 - x^2 \sqrt{n^3})^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, deducem că $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n^3}}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut și uniform convergentă pe \mathbf{R} . 2) Deoarece $|f_n(x)| \leq \arctg \frac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut și uniform convergentă pe \mathbf{R} . 3) Deoarece $|f_n(x)| < \frac{3}{n^2}$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și $\forall n \in \mathbf{N}^*$. In baza criteriului lui Weierstrass, rezultă că seria este absolut și uniform convergentă pe \mathbf{R} .

8.26 Să se studieze convergența simplă și uniformă a următoarelor serii de funcții, pe mulțimile indicate:

$$1) x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1+nx} - \frac{x}{1+(n-1)x} \right), \quad x \in [0, 1]. \quad 2) 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1}), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

R: 1) $s_n(x) = \frac{x}{1+nx} \rightarrow 0$, deci seria este convergentă la funcția $f(x) = 0$ pe $[0, 1]$. Apoi, din: $|s_n(x) - 0| < \frac{1}{n}$, $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[0, 1]$.

2) $s_n(x) = x^n \rightarrow 0$ și $|s_n(x) - 0| \leq |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, rezultă că seria este uniform convergentă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

8.27 Să se arate că seria de funcții:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2} \right],$$

este convergentă pe $[0, 1]$ la o funcție continuă, dar nu este uniform convergentă pe $[0, 1]$.

R: 1) Șirul: $s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ converge la funcția $f(x) = 0$ pe $[0, 1]$ care este continuă. Pe de altă parte, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, pentru $x_n = \frac{1}{n}$, avem: $|s_n(x) - 0| = \frac{1}{2}$. Așadar, există un $\varepsilon > 0$ a.î. oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $|s_n(x) - 0| \geq \varepsilon$ pentru cel puțin un punct din intervalul $[0, 1]$. Deci seria nu este uniform convergentă pe $[0, 1]$.

8.28 Să se studieze convergența simplă și uniformă a următoarelor serii de funcții, pe mulțimile indicate:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+n+x} - \frac{(n-1)x}{n+x} \right], \quad x \in [0, 1].$$

- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{nx}{1+nx} - \frac{(n-1)x}{(n)-1+x} \right], x \in [0, 1].$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}], x \in [0, 1].$
- 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1+x)^n}, x \in \mathbf{R}.$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}), x \in [0, 1].$
- 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n}, x \in \mathbf{R}.$

R: 1) Uniform convergentă. 2) Simplu convergentă. 3) Simplu convergentă. 4) Conform criteriului lui Cauchy, seria este uniform convergentă pe \mathbf{R} . 5) Simplu convergentă. 6) Uniform convergentă.

8.29 Să se arate că seriile următoare sunt uniform convergente pe mulțimile indicate:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, x \in [-1, 1].$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, x \in \mathbf{R}.$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, x \in [0, 1].$

R: 1) Din $|x| \leq 1$, rezultă $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$

2) $\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n},$ pe $\mathbf{R}.$

3) $\left| (-1)^{n-1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$ pe $[0, 1].$

8.30 Aplicând derivarea și integrarea termen cu termen să se găsească sumele următoarelor serii de funcții definite pe intervalul $(-1, 1):$

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$
- 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$
- 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$
- 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$
- 5) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$

R: Seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ este convergentă pe intervalul mărginit $(-1, 1)$ și are ca sumă funcția $f(x) = \frac{1}{1-x}.$

1) Derivând termen cu termen seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ obținem $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$

2) Integrând termen cu termen seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ obținem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x).$

3) Trecând pe x în $-x$ în 2) obținem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \ln(1-x).$

4) Trecând x în $-x^2$ în seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ obținem convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ a cărei sumă este $\frac{1}{1+x^2}$. Integrând termen cu termen această serie, obținem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \operatorname{arctg} x.$$

$$5) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

8.31 Să se arate că:

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx.$$

R: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2})$ are ca sumă funcția $f(x) = 0$, deci $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Pe de altă parte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^n - x^{2n} - x^{n-1} + x^{2n-2}) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 0.$$

8.3 Serii de puteri

8.32 Să se calculeze raza de convergență a următoarelor serii de puteri:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha (x-1)^n. \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (x+3)^n.$$

R: 1) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$, deci $r = 2$. 2) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$, deci $r = 1$. 3) $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4$, deci $r = \frac{1}{4}$.

8.33 Să se determine intervalul de convergență și să se studieze convergența la capetele intervalului, pentru următoarele serii de puteri:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^n}. \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{5^n \sqrt{n+1}}. \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x+2)^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}. \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}.$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) [-3, 3]. \quad 2) (-5, 5]. \quad 3) \left[-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, -2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad 4) [-1, 3).$$

8.34 Să se determine intervalul de convergență și să se studieze convergența la capetele intervalului, pentru următoarele serii de puteri:

$$1) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n \cdot \ln^\alpha n} x^n, \alpha > 1. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{n!} x^n.$$

R: 1) $r = 1$. În punctul $x = 1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. În punctul $x = -1$ seria este convergentă, conform criteriului lui Bertrand. Deci intervalul de convergență este $[-1, 1]$.

2) $r = \frac{1}{4}$. În punctul $x = \frac{1}{4}$ seria este divergentă, conform criteriului lui Raabe-Duhamel, iar în punctul $x = -\frac{1}{4}$ seria este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Deci intervalul de convergență este $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

8.4 Serii Taylor

8.35 Să se arate că:

$$\begin{aligned} 1) e^x &= 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in \mathbf{R}. \\ 2) \sin x &= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots, x \in \mathbf{R}. \\ 3) \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, x \in \mathbf{R}. \\ 4) \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}x^n + \cdots, x \in (-1, 1]. \end{aligned}$$

8.36 Să se arate că pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$ și $x \in (-1, 1)$ are loc dezvoltarea binomială:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

8.37 Să se stabilească formula lui Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

8.38 Să se găsească seriile Mac-Laurin ale funcțiilor:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ 2) \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

R: Se obține:

$$\begin{aligned} 1) \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, x \in \mathbf{R}. \\ 2) \operatorname{sh} x &= \frac{1}{1!}x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots, x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

8.39 Să se găsească seriile Mac-Maurin ale următoarelor funcții:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}. & 2) f(x) = a^x, a > 0. \\ 3) f(x) = \cos(x + \alpha). & 4) f(x) = \sin^2 x. \\ 5) f(x) = \ln(2+x). \end{array}$$

R: 1) Putem scrie:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n, |x| < \frac{1}{2}.$$

2) Se obține:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, x \in \mathbf{R}.$$

3) Se ține seama că: $f(x) = \cos x \cos \alpha - \sin x \sin \alpha$. 4) Se ține seama că: $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$. 5) Funcția se mai poate scrie: $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right)$, pentru $x \in (-2, 2]$.

8.40 Aplicând derivarea și integrarea termen cu termen, să se găsească seriile Mac-Laurin ale următoarelor funcții:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = (1+x) \ln(1+x). & 2) f(x) = \operatorname{arctg} x. \\ 3) f(x) = \arcsin x. & 4) f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \end{array}$$

R: 1) Deoarece $f'(x) = \ln(1+x)$, ținând seama de dezvoltarea funcției $\ln(1+x)$, prin integrare obținem:

$$(1+x) \ln(1+x) = \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} x^n + \cdots, x \in (-1, 1].$$

2) Avem că: $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -1$, pe x prin x^2 , obținem:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in (-1, 1).$$

3) Avem că: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, pe x prin $-x^2$, obținem:

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

4) Avem că: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}$. Dar, înlocuind în dezvoltarea binomială, pentru $\alpha = -\frac{1}{2}$, pe x prin x^2 , obținem:

$$f'(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n},$$

care prin integrare, dă:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

8.41 Să se găsească seriile Mac-Laurin ale funcțiilor:

$$1) f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad 2) f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt, \quad 3) f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

R: 1) Înlocuind în dezvoltarea funcției e^x pe x prin $-t^2$ și integrând între 0 și x , obținem:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

2) Înlocuind în dezvoltarea funcției $\operatorname{arctg} x$ pe x prin t , împărțind prin t și integrând între 0 și x obținem:

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

3) Înlocuind în dezvoltarea funcției $\ln(1+x)$ pe x prin t , împărțind prin t și integrând între 0 și x obținem:

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} x^n, \quad x \in [-1, 1].$$

8.42 Să se determine parametrii reali α și β a.î. seriile:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{n} + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} \right]. \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta-1}{n^2} \right]$$

să fie convergente.

R: 1) Se folosesc dezvoltările în serii de puteri ale funcțiilor $\operatorname{arctg} x$ și $\ln(1+x)$ și se găsește $\alpha = 2$ și $\beta = \frac{1}{2}$. 2) Se folosește dezvoltarea lui e^x și se obține $\alpha = 1$ și $\beta = \frac{3}{2}$.

Capitolul 9

Integrala Riemann și extinderi

9.1 Primitive. Integrala nedefinită

9.1 Să se calculeze integralele:

$$1) \int (6x^2 + 8x + 3) dx. \quad 2) \int \sqrt{2px} dx. \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}. \quad 5) \int \frac{dx}{x^2+7}. \quad 6) \int \frac{dx}{x^2-10}.$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) 2x^3 + 4x^2 + 3x + C, \quad 2) \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C, \quad 3) \frac{n}{n-1}x^{1-\frac{1}{n}} + C, \\ 4) \arcsin \frac{1}{4}x\sqrt{2} + C, \quad 5) \frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C, \quad 6) \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right| + C.$$

9.2 Să se calculeze integralele:

$$1) \int \frac{x dx}{(x-1)(x+1)^2}. \quad 2) \int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}. \quad 3) \int \frac{dx}{2x^2+3x+2}.$$

$$4) \int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}. \quad 5) \int \frac{dx}{x^4+1}. \quad 6) \int \frac{x^4 dx}{x^3-1}.$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2(x+1)} + C. \quad 2) \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} + C. \\ 3) \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}}(4x+3) + C. \quad 4) \frac{1}{2} \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} (x+2) + C. \\ 5) \frac{1}{8} \sqrt{2} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{arctg} (x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{4} \sqrt{2} \operatorname{arctg} (x\sqrt{2}-1) + C. \\ 6) \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} \ln (x-1) - \frac{1}{6} \ln (x^2+x+1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} (2x+1) + C.$$

9.3 Să se calculeze, efectuând schimbarea de variabilă indicată:

$$\begin{aligned} &1) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, \quad t = \ln x. \quad 2) \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx, \quad t = e^x. \\ &3) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}, \quad t = 5x. \quad 4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}, \quad t = x^4. \\ &5) \int \frac{\cos x}{a^2 + 2 \sin^2 x} dx, \quad t = \frac{1}{a} \sin x. \quad 6) \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}, \quad t = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x. \\ &7) \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos(2x)}} dx, \quad t = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin x. \quad 8) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^4}}, \quad t^2 = 1 + \frac{1}{x^4}. \end{aligned}$$

R: 1) $\frac{2}{3} \ln \sqrt[3]{2} x + C$. 2) $\ln(e^x + 1) + C$.
 3) $\frac{1}{5} \arcsin 5x + C$. 4) $\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C$.
 5) $\frac{1}{|a|\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2}}{|a|} \sin x \right) + C$. 7) $\frac{1}{2} \sqrt{2} \arcsin \left(\frac{1}{3} \sqrt{6} \sin x \right) + C$.
 8) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4}) + C$.

9.4 Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned} &1) \int \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^4} dx. \quad 2) \int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}} dx. \quad 3) \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx. \\ &4) \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx. \quad 5) \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx. \quad 6) \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} e^{\arcsin x} dx. \\ &7) \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx. \quad 8) \int e^{ax} \cos(bx) dx. \quad 9) \int \sqrt{x^2 + 1} dx. \\ &10) \int \sqrt{9 - x^2} dx. \quad 11) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^3}} dx. \quad 12) \int \sqrt{x^2 + x + 1} dx. \end{aligned}$$

R: 1) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(1 + x^4) + C$. 2) $t = 2^x$, dă: $\frac{1}{\ln 2} \arcsin t + C$.
 3) $\frac{1}{2} x^2 + \frac{12}{7} (\sqrt[6]{x})^7 + 3 \sqrt[3]{x} + C$. 4) $\frac{1}{\ln 2 + 3 \ln 5 + 2 \ln 3} 2^x 3^{2x} 5^{3x} + C$.
 5) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$. 6) $t = \arcsin x$, dă: $\frac{1}{2} e^t (\sin t - \cos t) + C$.
 7) $-\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3}{x} \ln^2 x - \frac{6}{x} \ln x - \frac{6}{x} + C$.
 8) $\frac{a}{a^2 + b^2} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx + C$.
 9) $\frac{1}{2} x \sqrt{(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{(x^2 + 1)}) + C$.

- 10) $\frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}x + C$. 11) $t^2 = x^3$, dă: $\frac{2}{3}\arcsin t + C$.
 12) $\frac{1}{4}(2x+1)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C$.

9.5 Să se găsească formule de recurență pentru integralele:

$$1) I_n(x) = \int \sin^n x dx. \quad 2) J_n(x) = \int \cos^n x dx.$$

R: 1) $I_n(x) = \frac{n-1}{n}I_{n-2}(x) - \frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cos x, n \geq 2$.
 2) $J_n(x) = \frac{n-1}{n}J_{n-2}(x) + \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x, n \geq 2$.

9.6 Să se găsească formule de recurență pentru integralele:

$$1) I_n(x) = \int \frac{dx}{\cos^n x}. \quad 2) I_n(x) = \int x^n e^{-x} dx.$$

R: 1) $I_{n+2}(x) = \frac{1}{(n+1)\cos^{n+1}x} + \frac{n}{n+1}I_n(x)$. 2) $I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x)$.

9.7 Să se calculeze integralele:

$$1) \int \sqrt{-x^2+3x-2} dx. \quad 2) \int \frac{x^4+1}{x^3+1} dx. \quad 3) \int \frac{dx}{x^3+x^5}.$$

$$4) \int \frac{x+1}{x^4+x^2+1} dx. \quad 5) \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}. \quad 6) \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx.$$

$$7) \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}. \quad 8) \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)} dx. \quad 9) \int \frac{dx}{2x^2+3x+2}.$$

R: 1) $-\frac{1}{4}(-2x+3)\sqrt{(-x^2+3x-2)} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-3) + C$.
 2) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{3}\ln(x^2-x+1) + C$.
 3) $\int \frac{dx}{x^3+x^5} = -\frac{1}{2x^2} - \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.
 4) $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) - \frac{1}{6}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1) + C$.
 5) $\frac{1}{2}\ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x+2) + C$.
 6) $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{2} + C$. 7) $\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$.
 8) $-\frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{3}{8(x-1)} + \frac{5}{32}\ln\frac{x-1}{x+3} + C$. 9) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}(4x+3) + C$.

9.8 Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx. \quad 2) \int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sin 2\sqrt{x}} dx. \quad 3) \int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx. \\ 4) \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt[4]{x} + 1)^{10}}. \quad 5) \int \frac{dx}{x^4 \cdot \sqrt{1 + x^2}}. \quad 6) \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}. \\ 7) \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}. \quad 8) \int \frac{dx}{\sin 2x - \cos 2x}. \quad 9) \int \operatorname{tg}^7 x dx. \end{aligned}$$

9.9 Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}}. \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + 1}}. \quad 3) \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx. \\ 4) \int \frac{dx}{(1 + x) \sqrt{1 + x + x^2}}. \quad 5) \int \frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}} dx. \quad 6) \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx. \end{aligned}$$

9.10 Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{(e^{3x} - e^x) dx}{e^{4x} - e^{3x} + 2e^{2x} - e^x + 1}. \quad 2) \int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 6x dx. \\ 3) \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} e^{\arctg x} dx. \quad 4) \int \frac{2x - 5}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + a} dx, \quad a > 1. \\ \mathbf{R}: 1) \ln \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x} + 1} + C. \quad 2) \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 8x + \sin 2x + \frac{1}{5} \sin 10x \right). \\ 3) x e^{\arctg x} + C. \quad 4) \frac{1}{\sqrt{a - 1}} \arctg \frac{x^2 - 5x + 5}{\sqrt{a - 1}} + C. \end{aligned}$$

9.11 Să se calculeze integralele:

$$\begin{aligned} I(x) = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3 + \sin 4x}} dx, \quad J(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3 + \sin 4x}} dx. \\ \mathbf{R}: I(x) + J(x) = \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \cos 4x) + C_1, \quad I(x) - J(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3 + \sin 4x} + C_2. \end{aligned}$$

9.12 Să se calculeze integralele:

$$I(x) = \int \frac{\sin x}{e^x + \sin x + \cos x} dx, \quad J(x) = \int \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x + \cos x} dx.$$

R: Se calculează $J(x) + I(x)$ și $J(x) - I(x)$.

9.13 Să se calculeze integralele:

$$1) \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx. \quad 2) \int \frac{x^4 + 4x^2}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

R: 1) Integrala se poate pune sub forma:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Derivând și identificând coeficienții, obținem: $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\gamma = \frac{7}{6}$, $\lambda = \frac{5}{2}$. Găsim:

$$\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{7}{6}\right) \sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{5}{2} \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}| + C.$$

$$2) \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x\right) \sqrt{x^2 + 4} - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C.$$

9.14 Să se calculeze integralele binome:

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}. \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+1}}. \quad 3) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}. \quad 4) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

R: 1) $\frac{m+1}{n} = 0$, se efectuează schimbarea de variabilă: $x^2 + 1 = t^3$ și se obține:

$$\frac{3}{2} \int \frac{t dt}{t^3 - 1} = \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{1}{2} \sqrt{3} \arctan \frac{1}{3} (2t+1) \sqrt{3} + C.$$

2) $\frac{m+1}{n} + p = 0$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1 + x^{-4} = t^4$ și se obține:

$$- \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t+1}{t-1} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C.$$

3) $\frac{m+1}{n} = 3$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1 + x^{\frac{2}{3}} = t^2$ și se obține:

$$3 \int (t^2 - 1)^2 dt = \frac{3}{5} t^5 - 2t^3 + 3t + C.$$

4) $\frac{m+1}{n} = 2$, se efectuează schimbarea de variabilă: $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$ și se obține:

$$12 \int t^3 (t^3 - 1) dt = \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C.$$

9.15 Să se calculeze integralele binome:

$$1) \int x^3 (2x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} dx. \quad 2) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{(x^3 + 2)^5}}.$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}. \quad 4) \int \sqrt[3]{x} \sqrt{5x \sqrt[3]{x} + 3} dx.$$

9.2 Integrala definită

9.16 Să se arate că:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2.$$

R: Se va observa că:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx. \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx.$$

9.17 Să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

$$1) a_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n k^4. \quad 2) a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+k}.$$

$$3) a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k^2}{n^2}}. \quad 4) a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

9.18 Să se calculeze, aplicând formula lui Leibniz-Newton:

$$1) \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx. \quad 2) \int_{-x}^x e^t dt. \quad 3) \int_0^x \cos t dt.$$

$$4) \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx. \quad 5) \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{x}}{x^2} dx. \quad 6) \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x^2 + 4x + 5} dx.$$

$$7) \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx. \quad 8) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg} x dx. \quad 9) \int_0^1 \operatorname{ch} x dx.$$

R: 1) $\ln 2$. 2) $e^x - e^{-x}$. 3) $\sin x$. 4) $2 \ln 3 - 3 \ln 2$. 5) $\frac{7}{4}$. 6) $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \pi$.

7) $\frac{1}{16} \pi$. 8) $\frac{1}{2} \ln 3$. 9) $\frac{1}{2} (e - e^{-1})$.

9.19 Să se arate că:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \text{ și } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

9.20 Să se găsească o formulă de recurență pentru integrala:

$$J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

R: Efectuând schimbarea de variabilă $x = \sin t$, se obține $J_n = I_{2n+1}$, de unde:

$$J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}.$$

9.21 Să se calculeze:

$$\begin{aligned} &1) \int_0^1 x^2 e^x dx. \quad 2) \int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)} dx. \quad 3) \int_0^\pi x^2 \cos x dx. \\ &4) \int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx. \quad 5) \int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}. \quad 6) \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx. \\ &7) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx. \quad 8) \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx. \quad 9) \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx. \end{aligned}$$

R: 1) $e - 2$. 2) $\frac{\pi}{8} (b-a)^2$. 3) -2π . 4) $\sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} + 1)$.
 5) $\operatorname{arctg} e - \frac{1}{4}\pi$. 6) $\frac{98}{3}$. 7) $\frac{\pi}{8} \ln 2$. 8) $\frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \ln 2 \right)$. 9) $\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{4}$.

9.22 Să se calculeze:

$$\begin{aligned} &1) \int_0^2 e^x \max\{1, x^2\} dx. \quad 2) \int_2^3 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}. \quad 3) \int_{-2}^2 \min\{x-1, x+1\} dx. \\ &4) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx. \quad 5) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}. \quad 6) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx. \end{aligned}$$

R: 1) $2e^2 - e$. 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. 3) 2 . 4) $1 - \cos 1$. 5) $\frac{\pi}{6}$. 6) $2 \left(\frac{2\pi}{3} - \ln \left(\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \right) \right)$.

9.23 Să se calculeze:

$$1) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2 - \cos^2 x)(e^x + 1)} dx. \quad 2) I = \int_0^{2n\pi} \sin(x + \sin x) dx, \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

R: 1) Avem, succesiv:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)(e^x + 1)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)(e^x + 1)} dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \operatorname{arctg}(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2) Efectuăm schimbarea de variabilă: $x = t + n\pi$ și obținem succesiv:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin[t + n\pi + \sin(t + n\pi)] dt = \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin[n\pi + (t + (-1)^n \sin t)] dt = \\ &= (-1)^n \int_{-n\pi}^{n\pi} \sin[t + (-1)^n \sin t] dt = 0, \end{aligned}$$

deoarece integrantul este o funcție impară.

9.24 Să se arate că:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} dx = k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

R: Notăm $I(k) = \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{1 - \cos kx}{1 - \cos x} dx$. Se constată că:

$$I(k+1) + I(k-1) = 2I(k) + 2 \int_{\varepsilon}^{\pi} \cos kx dx,$$

de unde: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [I(k+1) - 2I(k) + I(k-1)] = 0$. Cum $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(1) = \pi$, presupunând că $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(k-1) = (k-1)\pi$ și $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(k) = k\pi$, rezultă prin inducție, că $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(k+1) = (k+1)\pi$.

9.25 Să se calculeze integrala:

$$I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx, \quad \text{cu } m, n \in \mathbf{N}.$$

R: Integrând prin părți, se obține formula de recurență: $I_{m,n} = \frac{m}{n+1} \cdot I_{m-1,n+1}$, de unde rezultă:

$$I_{m,n} = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} (b-a)^{n+m+1}.$$

9.26 Dacă $a < b$ și $n \in \mathbf{N}^*$, să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_a^b (x-a)^n (b-x)^n dx \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} (b-a)^2.$$

R: Din exercițiul precedent avem că:

$$I_{n,n} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} (b-a)^{2n+1},$$

de unde rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I_{n,n}} = (b-a)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}} = \frac{1}{4} (b-a)^2.$$

9.27 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă. Să se arate că:

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

R: Intr-adevăr,

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(\sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx.$$

Efectuând în cea de-a doua integrală schimbarea de variabilă: $x = \pi - t$, obținem:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(\sin x) dx.$$

9.28 Fie $f : [0, a] \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ o funcție integrabilă. Să se arate că:

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}.$$

R: Fie:

$$I(a) = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx \text{ și } J(a) = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx.$$

Evident: $I(a) + J(a) = a$. Efectuând în integrala $J(a)$ schimbarea de variabilă $x = a - t$, obținem că $J(a) = I(a)$. Deci, $I(a) = \frac{a}{2}$.

9.29 Să se calculeze integralele:

$$1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} dx. \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx.$$

R: 1) Fie $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$. Atunci, $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = (\sin x)^{\cos x}$ și conform exercițiului precedent valoarea integralei este $\frac{\pi}{4}$. 2) Fie $f(x) = \sin^2 x + \sin x$. Atunci, $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^2 x + \cos x$ și deci valoarea integralei este $\frac{\pi}{4}$.

9.30 Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x) + f(-x) = \pi$, pentru orice $x \in [-1, 1]$. Să se calculeze integrala:

$$I = \int_0^{(2n+1)\pi} f(\cos x) dx.$$

R: Efectuăm schimbarea de variabilă: $x = (2n+1)\pi - t$. Obținem:

$$I = \int_0^{(2n+1)\pi} f(-\cos t) dt.$$

Dar: $f(-\cos t) = \pi - f(\cos t)$ și deci $I = \frac{2n+1}{2}\pi^2$.

9.31 Fie $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ o funcție continuă strict crescătoare pe \mathbf{R}_+ și $f(0) = 0$. Să se stabilească inegalitatea lui Young:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy \geq ab, \quad \forall a, b \in \mathbf{R}_+.$$

R: Fie S_x aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreapta $x = a$ și S_y aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f , axa Oy și dreapta $y = b$. Evident: $S_x + S_y \geq ab$, de unde inegalitatea cerută.

9.32 Fie $F(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} dt$. Să se calculeze $F'(x)$.

R: Notăm cu $G(t)$ o primitivă a funcției e^{t^2} , deci a.î. $G'(t) = e^{t^2}$. Atunci:

$$F(x) = G(t)|_0^{x^3} = G(x^3) - G(0), \text{ de unde: } F'(x) = 3x^2 G'(x) = 3x^2 e^{x^6}.$$

9.33 Fie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă pe \mathbf{R} , definită prin: $f(x) = \int_0^{\arctg x} e^{tg^2 t} dt$. Să se calculeze $f'(x)$ și să se arate că:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}} dx + \frac{1}{2e} \int_0^1 \frac{e^{x^2}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8}.$$

R: Se constată că $f(0) = 0$ și $f'(x) = \frac{e^{x^2}}{1+x^2}$. Integrând prin părți, avem:

$$\int_0^1 \frac{xf(x)}{e^{x^2}} dx = -\frac{1}{2} f(x) e^{-x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} f'(x) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{f(1)}{2e}.$$

9.34 Fie $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$, $x > 0$. Să se calculeze $f'(x)$.

$$\mathbf{R}: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}.$$

9.35 Să se determine funcțiile derivabile $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, care verifică relația:

$$x + \int_0^x f(t) dt = (x+1)f(x).$$

R: $f(0) = 0$ și prin derivarea relației date, obținem: $1 + f(x) = [(x+1)f(x)]'$, de unde: $f'(x) = \frac{1}{x+1}$. Deci $f(x) = \ln(1+x)$.

9.36 Fără a calcula efectiv integrala, să se arate că:

$$0 \leq \int_0^1 \ln \frac{e^x + 1}{2} dx \leq \ln \frac{e+1}{2}.$$

R: Fie $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}$. Din: $f'(x) > 0$ pe \mathbf{R} , rezultă: $f(0) < f(x) < f(1)$ etc.

9.37 Fie $f : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ o funcție continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că dacă:

$$\int_0^1 f(x) dx = 0, \text{ atunci } \int_0^1 f^2(x) dx \leq -ab.$$

R: Se integrează pe $[0, 1]$ inegalitatea: $[f(x) - a][f(x) - b] \leq 0$.

9.38 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, cu derivată continuă, a.î.

$$f'(x) \geq 1 + f^2(x), \forall x \in [a, b].$$

Să se arate că: $b - a < \pi$.

R: Se integrează pe $[a, b]$ inegalitatea:

$$\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} \geq 1, \forall x \in [a, b]$$

și se ține seama de faptul că: $-\frac{\pi}{2} < \arctg \alpha < \frac{\pi}{2}$, pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$.

9.39 Dacă $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție continuă și periodică, de perioadă T , atunci:

$$\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt, \forall x \in \mathbf{R}.$$

R: Fie $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$. Deoarece $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, rezultă că $F(x) = C$. Pentru $x = 0$ obținem $C = \int_0^T f(t) dt$.

9.40 Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx$. Se cere:

- 1) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}$ are loc inegalitatea: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.
- 2) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.
- 3) Folosind identitatea:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} = \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x},$$

să se arate că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

9.41 Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ a.î.

$$P(c) = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_n}{n+1}.$$

R: Aplicăm prima formulă de medie integralei $\int_0^1 P(x) dx$.

9.42 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă care satisface condiția:

$$6 \int_0^1 f(x) dx = 2a + 3b + 6c.$$

Să se arate că există $x_0 \in (0, 1)$ a.î. $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$.

R: Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin: $g(x) = 6[f(x) - ax^2 + bx + c]$. Se constată imediat că $\int_0^1 g(x) dx = 0$. Pe de altă parte, din teorema de medie, rezultă că există $x_0 \in (0, 1)$ a.î. $\int_0^1 g(x) dx = g(x_0)$.

9.43 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă care satisface condiția: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ a.î. $f(c) = c^2$.

R: Condiția din enunț se mai scrie: $\int_0^1 [f(x) - x^2] dx = 0$ și se aplică teorema de medie.

9.44 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă, cu derivată continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ a.î.

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(c).$$

R: Avem:

$$\int_0^1 f(x) dx = (x-1)f(x)|_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x) dx,$$

dar, conform formulei de medie, există $c \in (0, 1)$ a.î.

$$\int_0^1 (x-1)f'(x) dx = f'(c) \int_0^1 (x-1) dx = -\frac{1}{2}f'(c).$$

9.45 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata f'' continuă pe $[0, 1]$. Să se arate că există $c \in (0, 1)$ a.î.

$$\int_0^1 f(x) dx = f(0) + \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{6}f''(c).$$

R: Se integrează de două ori prin părți și se aplică teorema de medie.

9.46 Să se determine funcțiile continue $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică egalitatea

$$\sin\left(\int_0^x f(t) dt\right) = \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

R: Din egalitatea dată rezultă:

$$\int_0^x f(t) dt = \arcsin \frac{x}{1+x}, \text{ de unde } f(x) = \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x}}.$$

9.47 Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$. Să se arate că există $c \in (a, b)$ pentru care:

$$a \int_a^c f(x) dx + b \int_c^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx.$$

R: Fie funcția $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin: $F(t) = \int_a^t f(x) dx$, derivabilă cu $F'(t) = f(t)$, $\forall x \in [a, b]$. Avem, succesiv:

$$\int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x F'(x) dx = x F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) dx = b \int_a^b f(x) dx - \int_a^b F(x) dx.$$

Conform teoremei de medie există $c \in (a, b)$ a.î. $\int_a^b F(x) dx = (b-a) F(c)$.

9.48 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[0, 1]$ pentru care există $n \in \mathbf{N}^*$ a.î.

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Să se arate că există $x_0 \in (0, 1)$ a.î. $f(x_0) = \frac{1 - x_0^n}{1 - x_0}$.

R: Fie $g : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin:

$$g(x) = f(x) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}).$$

Se constată imediat că $\int_0^1 g(x) dx = 0$, deci după teorema de medie există $x_0 \in (0, 1)$ a.î. $g(x_0) = 0$.

9.3 Integrale improprii

9.49 Să se studieze natura și în caz de convergență să se calculeze integralele improprii:

$$1) I_n = \int_0^\infty \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N}^*. \quad 2) I_n = \int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad a > 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

R: 1) Aplicăm **Criteriul I**. Deoarece $|f(x)| x^{2n} = \frac{x^{2n}}{(a^2 + x^2)^n} \leq 1, \forall x \in (0, \infty)$, cum $\alpha = 2n > 1$ și $M = 1$, rezultă că integrala este convergentă. Avem apoi:

$$I_1 = \frac{\pi}{2a}, \quad I_n = \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

2) Aplicăm **Criteriul II**. Deoarece $|f(x)| (a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^n}{\sqrt{a+x}} \leq \frac{a^n}{\sqrt{a}}, \forall x \in (0, a)$, cum $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ și $M = \frac{a^n}{\sqrt{a}}$, rezultă că integrala este convergentă. Avem apoi:

$$I_1 = \frac{\pi}{2}, \quad I_n = a^2 \frac{n-1}{n} I_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

9.50 Să se studieze natura și în caz de convergență să se calculeze integralele improprii:

$$1) I = \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx. \quad 2) I = \int_a^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx, \quad a > 0. \quad 3) I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha} dx.$$

R: 1) Scriem integrala ca sumă de două integrale, una pe intervalul $[1, \sqrt{2}]$ și a doua pe intervalul $[\sqrt{2}, \infty)$. Pentru prima integrală $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $M = \frac{1}{\sqrt{2}}$, pentru a doua integrală $\alpha = 2 > 1$, $M = \sqrt{2}$, deci ambele integrale sunt convergente. Se obține $I = \frac{\pi}{2}$.
2) Convergentă și $I = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2+1}{a^2-1}$. 3) Convergentă pentru $\alpha > 1$ și $I = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$, divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

9.51 Să se studieze natura și în caz de convergență să se calculeze integralele improprii:

$$1) I = \int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}. \quad 2) I = \int_0^2 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{4-x^2}}. \quad 3) I = \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx.$$

R: 1) Convergentă și $I = \ln 2$. 2) Convergentă și $I = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$. 3) Divergentă.

9.52 Să calculeze integralele:

$$1) I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x}. \quad 2) I = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}.$$

R: 1) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \pi + u$ și obținem:

$$I = \int_{-\pi}^\pi \frac{du}{4+3\cos u} = \int_{-\infty}^\infty \frac{2 dt}{t^2+7} = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

2) Scriind integrala ca sumă a două integrale, una pe $[0, \frac{\pi}{2}]$ și a doua pe $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ cu schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} x$, se obține:

$$I = 2 \int_0^\infty \frac{1+t^2}{t^4+t^2+1} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

9.53 Să calculeze integralele:

$$1) I_n = \int_0^\infty e^{-x} x^n dx. \quad 2) I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{3} dx. \quad 3) I = \int_0^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx.$$

$$4) I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b. \quad 5) I = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx. \quad 6) I = \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx.$$

$$7) I = \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b. \quad 8) I = \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}. \quad 9) I = \int_0^1 \ln(1-x) dx.$$

R: 1) $I_n = nI_{n-1}$, deci $I_n = n!$. 2) Deoarece $\left| \frac{\arctg x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right| x^3 < \frac{\pi}{2}, \forall x \in (0, \infty)$, integrala este convergentă. Integrând prin părți, obținem: $I = \frac{\pi}{2} - 1$. 3) $I = -\frac{1}{8}$. 4) $I = \pi$.

5) $I = 6 - 9 \ln \sqrt{3}$. 6) $I = \frac{1}{4}(\pi + 2)$. 7) $I = \frac{\pi}{2}(a+b)$. 8) $I = 2$. 9) $I = 1$.

9.54 Să calculeze integralele:

$$1) I = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx, \quad \alpha > 0. \quad 2) I = \int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x}. \quad 3) I = \int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}.$$

$$4) I = \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}. \quad 5) I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}. \quad 6) I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

$$7) I = \int_1^\infty \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}. \quad 8) I = \int_2^4 \frac{3 + \cos x}{(x-2)^2} dx. \quad 9) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx.$$

R: 1) $I = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$. 2) $I = 1$. 3) $I = \frac{33\pi}{2}$. 4) $I = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 5) $I = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
 6) Divergentă. 7) Divergentă. 8) Divergentă.
 9) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \frac{\pi}{2} - 2t$ și obținem:

$$I = 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t) dt + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt.$$

În ultima integrală efectuăm schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - u$. Rezultă $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

9.55 Fie $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție continuă pe $[0, \infty)$ și integrala improprie (integrala lui Froullani):

$$I = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad 0 < a < b.$$

1) Să se arate că dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k \in \mathbf{R}$, atunci integrala I este convergentă și $I = [f(0) - k] \ln \frac{b}{a}$.

2) Dacă există $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nu este finită, dar $\int_\alpha^\infty f(x) dx$ este convergentă pentru orice $\alpha > 0$, atunci integrala I este convergentă și $I = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

R: 1) Pentru orice $[t_1, t_2] \subset [0, \infty)$ avem:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{at_1}^{at_2} \frac{f(u)}{u} du - \int_{bt_1}^{bt_2} \frac{f(u)}{u} du = f(c_1) \int_{at_1}^{at_2} \frac{du}{u} - f(c_2) \int_{bt_1}^{bt_2} \frac{du}{u} = [f(c_1) - f(c_2)] \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

cu $c_1 \in [at_1, bt_1]$ și $c_2 \in [at_2, bt_2]$. Dacă $t_1 \rightarrow 0$ și $t_2 \rightarrow \infty$, atunci $c_1 \rightarrow 0$ și $c_2 \rightarrow \infty$, deci: $f(c_1) \rightarrow f(0)$, iar $f(c_2) \rightarrow k$.

2) Fie $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției $\frac{f(x)}{x}$ pe $(0, \infty)$. Pentru orice $t \in (0, \infty)$, avem:

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{at}^\infty \frac{f(u)}{u} du - \int_{bt}^\infty \frac{f(u)}{u} du = F(bt) - F(at) = \\ &= \int_{at}^{bt} \frac{f(u)}{u} du = f(c) \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

cu $c \in [at, bt]$. Dacă $t \rightarrow 0$, atunci $c \rightarrow 0$, deci: $f(c) \rightarrow f(0)$.

9.56 Folosind integrala lui Froullani, să se calculeze:

$$1) I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a, b > 0. \quad 2) I = \int_0^\infty \frac{1}{x} \ln \frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} dx, \quad a, b, p, q > 0.$$

$$3) I = \int_0^\infty \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x} dx, \quad ab \neq 0. \quad 4) I = \int_0^\infty \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx, \quad a, b > 0.$$

$$5) I = \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx, \quad a, b > 0. \quad 6) I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x} dx.$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) I = \ln \frac{b}{a}. \quad 2) I = \ln \frac{p+q}{p} \ln \frac{b}{a}. \quad 3) I = \ln \left| \frac{b}{a} \right|.$$

$$4) I = 0. \quad 5) I = \ln \frac{b}{a}. \quad 6) I = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

9.57 Să se calculeze integrala lui Euler-Poisson: $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

R: Pe intervalul $(1, \infty)$ avem: $\int_1^\infty e^{-x^2} dx < \int_1^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{e}$, iar pe intervalul $[0, 1]$ avem o integrală definită. Deci integrala dată este convergentă. Observăm că pentru $x > 0$ are loc egalitatea: $\int_0^\infty xe^{-x^2y^2} dy = \int_0^\infty e^{-y^2} dy = I$. Putem scrie succesiv:

$$\begin{aligned} I^2 &= I \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty I e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty xe^{-x^2y^2} dy \right) e^{-x^2} dx = \\ &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty xe^{-x^2(y^2+1)} dx \right] dy. \end{aligned}$$

Efectuând schimbarea de variabilă $t = x^2 (y^2 + 1)$, obținem:

$$I^2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{y^2 + 1} \int_0^\infty e^{-t} dt \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă că $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9.58 Să se calculeze integralele lui Fresnel:

$$I_c = \int_0^\infty \cos x^2 dx, \quad I_s = \int_0^\infty \sin x^2 dx.$$

R: Efectuând schimbarea de variabilă $t = x^2$, obținem:

$$I_c = \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad I_s = \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$$

care sunt convergente. Putem însă scrie:

$$I_c - iI_s = \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \int_0^\infty e^{-ix^2} dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $ix^2 = u^2$, găsim: $I_c - iI_s = \frac{1}{2} (1 - i) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, de unde:

$$I_c = I_s = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

9.4 Integrale cu parametri

9.59 Să se calculeze integralele:

$$1) I(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2} dx. \quad 2) I(m, n) = \int_0^1 x^m \ln^n x dx.$$

R: 1) Deoarece:

$$I'(y) = \frac{\ln(1+y^2)}{1+y^2} + \int_0^y \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} dx = \frac{\ln(1+y^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2} \operatorname{arctg} y,$$

prin integrare, obținem:

$$I(y) = \int_0^y \left[\frac{\ln(1+t^2)}{2(1+t^2)} + \frac{t}{1+t^2} \operatorname{arctg} t \right] dt = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} y) \ln(1+y^2).$$

2) Derivând egalitatea $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ de n ori în raport cu m , găsim

$$I(m, n) = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

9.60 Să se calculeze integralele:

$$1) I_n(y) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}, \quad y > 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad 2) I(k, y) = \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin(xy)}{x} dx.$$

R: 1) Avem succesiv:

$$I_0(y) = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}, \quad I_1(y) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2y\sqrt{y}}, \quad \dots, \quad I_n(y) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2y^n\sqrt{y}}.$$

2) Pentru $k \neq 0$, derivând în raport cu y și integrând de două ori prin părți, avem:

$$I'(k, y) = \int_0^\infty e^{-kx} \cos(xy) dx = \frac{k}{k^2 + y^2}.$$

Deci, $I(k, y) = \arctg \frac{y}{k}$. Pentru $k = 0$, avem:

$$I(0, y) = \int_0^\infty \frac{\sin(xy)}{x} dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & y < 0, \\ 0, & y = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y > 0. \end{cases}$$

9.61 Să se calculeze integralele:

$$1) I(y) = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{y^2}{x^2}} dx, \quad y > 0.$$

$$2) I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arctg(y \sin x) dx.$$

$$3) I(y) = \int_0^1 \frac{\arctg(xy)}{x\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$4) I(y) = \int_0^1 \frac{\arctg(xy)}{x(1+x^2)} dx.$$

R: 1) Derivând în raport cu y , avem:

$$I'(y) = -2 \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{y^2}{x^2}} \frac{y}{x^2} dx = -2 \int_0^\infty e^{-z^2 - \frac{y^2}{z^2}} dz = -2I(y),$$

în urma schimbării de variabilă $x = \frac{y}{z}$. De aici rezultă: $I(y) = Ce^{-2y}$. Pentru $y = 0$,

obținem $C = I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Deci $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2y}$. 2) $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

$$3) I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}). \quad 4) I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1+y).$$

9.62 Să se calculeze integralele:

$$1) I(\alpha, \beta) = \int_0^\pi \ln(\alpha^2 \sin^2 x + \beta^2 \cos^2 x) dx, \quad \alpha, \beta > 0.$$

$$2) I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+y \cos x}{1-y \cos x} \frac{dx}{\cos x}, \quad |y| < 1. \quad 3) I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(y^2 - \sin^2 x) dx, \quad y > 1.$$

$$\mathbf{R}: 1) I(\alpha, \beta) = \pi \ln \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad 2) I(y) = \pi \arcsin y. \quad 3) I(y) = \pi \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 1}}{2}.$$

9.63 Să se arate că integrala lui Euler de speța a doua:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \quad p \in \mathbf{R}.$$

este convergentă pentru $p > 0$ și divergentă pentru $p \leq 0$. Să se stabilească relațiile: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, pentru $p > 0$ și $\Gamma(n+1) = n!$.

R: Putem scrie:

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Prima integrală este convergentă dacă $1-p < 1$, adică $p > 0$, fiind improprie de speța a doua, cu $e^{-1} < x^{1-p} (x^{p-1} e^{-x}) \leq 1$, pe $[0, 1]$. A doua integrală este convergentă pentru orice p , deoarece $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (x^{p-1} e^{-x}) = 0$, $\forall p \in \mathbf{R}$.

9.64 Să se arate că integrala lui Euler de prima speță:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q \in \mathbf{R},$$

este convergentă pentru $p > 0$ și $q > 0$ și divergentă pentru $p \leq 0$ sau $q \leq 0$. Să se stabilească relațiile:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0 \text{ și } B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \quad m, n \in \mathbf{N}^*.$$

R: Putem scrie:

$$B(p, q) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

Fie m_1, M_1 marginile funcției $(1-x)^{q-1}$ pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Atunci:

$$0 < m_1 \leq x^{1-p} [x^{p-1} (1-x)^{q-1}] \leq M_1.$$

Rezultă că prima integrală este convergentă dacă $p > 0$, $\forall q \in \mathbf{R}$. Fie apoi m_2, M_2 marginile funcției x^{p-1} pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Atunci:

$$0 < m_2 \leq x^{p-1} (1-x)^{1-q} [x^{p-1} (1-x)^{q-1}] \leq M_2.$$

Rezultă că a doua integrală este convergentă dacă $q > 0$, $\forall p \in \mathbf{R}$. Deci $B(p, q)$ este convergentă dacă $p > 0$ și $q > 0$.

Capitolul 10

Integrale curbilinii

10.1 Lungimea unui arc de curbă

10.1 Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:

- 1) $x = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$, $y = \sqrt{1+t^2}$, $t \in [0, 1]$.
- 2) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

R: 1) Avem $x'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, deci

$$L = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1+t^2} + \frac{t^2}{1+t^2}} dt = \int_0^1 dt = 1.$$

2) Avem $x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$ și $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$, deci

$$L = 3a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a.$$

10.2 Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:

- 1) $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}$, $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.
- 2) $x = 5 \sin t - \sin 5t$, $y = 5 \cos t - \cos 5t$, $t \in [0, 2\pi]$.

R: 1) Avem $x'(t) = \frac{1}{\sin t}$, $y'(t) = \frac{1}{\cos t}$. Atunci

$$L = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}} dt = \ln 3.$$

2) Avem $x'(t) = 5 \cos t - 5 \cos 5t$, $y'(t) = -5 \sin t - 5 \sin 5t$, deci

$$L = 5\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 3t} dt = 10 \int_0^{2\pi} |\sin 3t| dt = 60 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t dt = 40.$$

10.3 Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:

1) $x = e^{at} (a \sin bt - b \cos bt)$, $y = e^{at} (a \cos bt + b \sin bt)$, $t \in [0, 1]$, $a, b > 0$.

2) $x = \frac{t}{2} [\sin(\ln t) - \cos(\ln t)]$, $y = \frac{t}{2} [\sin(\ln t) + \cos(\ln t)]$, $t \in [1, 2]$.

3) $x = (3t^2 - 6) \sin t - (t^3 - 6t) \cos t$, $y = (3t^2 - 6) \cos t + (t^3 - 6t) \sin t$,

$t \in [-2\pi, 2\pi]$.

R: 1) $L = \frac{a^2 + b^2}{a} (e^a - 1)$. 2) $L = 1$. 3) $L = 8\pi^4$.

10.4 Să se calculeze lungimile următoarelor drumuri:

1) $\begin{cases} x = t, \\ y = \sqrt{2} \ln(\cos t), \\ z = \operatorname{tg} t - t, \end{cases} t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. 2) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \operatorname{ctg} t, \\ z = \sqrt{2} \ln(\operatorname{tg} t), \end{cases} x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

R: 1) $L = 2$. 2) $L = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10.2 Integrale curbilinii de primul tip

10.5 Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă \mathcal{C} , indicate:

1) $I = \int_{\mathcal{C}} xy ds$, $(\mathcal{C}) x = t$, $y = t^2$, $t \in [-1, 1]$.

2) $I = \int_{\mathcal{C}} y^2 ds$, $(\mathcal{C}) x = -\frac{1}{4}t^4$, $y = t$, $t \in [0, 2]$.

3) $I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{y(2-y)} ds$, $(\mathcal{C}) x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4) $I = \int_{\mathcal{C}} x^2 y^2 ds$, $(\mathcal{C}) x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

R: 1) Deoarece $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$, avem

$$I = \int_{-1}^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt = 0,$$

integrantul fiind o funcție impară și intervalul de integrare este simetric față de origine.

2) Deoarece $ds = \sqrt{t^6 + 1} dt$, avem

$$I = \int_0^2 t^2 \sqrt{t^6 + 1} dt = \frac{1}{3} \int_0^8 \sqrt{u^2 + 1} du = \frac{4}{3} \sqrt{65} + \frac{1}{6} \ln(8 + \sqrt{65}).$$

3) Deoarece $ds = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2 \sin \frac{t}{2} dt$, avem

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin \frac{t}{2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} dt = \frac{4}{3\sqrt{2}}.$$

4) Obținem:

$$I = \frac{3a^5}{2^7} \int_0^{2\pi} |\sin 2t|^7 dt = \frac{3a^5}{2^5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 2t dt,$$

deoarece funcția $|\sin 2t|^7$ este periodică, de perioadă $\frac{\pi}{2}$. Efectuăm schimbarea de variabilă $u = \cos 2t$ și obținem:

$$I = \frac{3a^5}{2^6} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^3 du = \frac{3}{70} a^5.$$

10.6 Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, unde C este cercul de ecuație $x^2 + y^2 = ax$.

R: O reprezentare parametrică a cercului C este: $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t)$, $y = \frac{a}{2} \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Se obține $I = 2a^2$.

10.7 Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă C , indicate:

- 1) $I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, (C) $x = r(\cos t + t \sin t)$, $y = r(\sin t - t \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 2) $I = \int_C (x^2 + y^2)^n ds$, (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 3) $I = \int_C |xy| ds$, (C) $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a, b > 0$, $t \in [0, 4\pi]$.

$$\mathbf{R:} \text{ 1) } I = \frac{r^2}{3} \left[(\sqrt{1 + 4\pi^2})^3 - 1 \right]. \text{ 2) } I = 2\pi a^{2n+1}. \text{ 3) } I = \frac{8ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.$$

10.8 Să se calculeze integralele curbilinii de primul tip, pe arcele de curbă C , indicate:

- 1) $I = \int_C (x^2 + y^2) \ln z ds$, (C) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in [0, 1]$.
- 2) $I = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} ds$, (C) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 3) $I = \int_C xy^2 z ds$, (C) $x = t$, $y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$, $z = \frac{1}{2}t^2$, $t \in [0, 1]$.
- 4) $I = \int_C (x^2 + y^2) z ds$, (C) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 1]$.

$$\mathbf{R:} \text{ 1) Deoarece } ds = \sqrt{3}e^t dt, \text{ rezultă } I = \frac{\sqrt{3}}{9} (2e^3 + 1). \text{ 2) } I = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \operatorname{arctg} \frac{2\pi b}{a}. \\ \text{3) } I = \frac{5}{42}. \text{ 4) } I = \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

10.9 Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C (x + y + z) ds$, unde $C = C_1 \cup C_2$, cu:

$$(C_1) \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \sin t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (C_2) \begin{cases} x = 0, \\ y = r - t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [0, r].$$

R: $I = (2 + \sqrt{2}) r^2$.

10.10 Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, unde C este cercul de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$.

R: O reprezentare parametrică a curbei este: $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t$, $z = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Se obține: $I = 2\pi a^2$.

10.11 Să se calculeze masa \mathcal{M} firului material cu densitatea liniară $\rho(x, y) = 1 + x$, care este imaginea curbei:

$$(C) \ x = t, \ y = \frac{1}{2}t^2, \ t \in [0, 1].$$

R: Deoarece $ds = \sqrt{1 + t^2} dt$, avem

$$\mathcal{M} = \int_0^1 (1 + t) \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{7}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{1}{3}.$$

10.12 Să se calculeze masele firelor materiale care au densitățile liniare și reprezentările parametrice următoare:

$$1) \ \rho(x, y, z) = \sqrt[4]{2y}, \ (C) \ x = \frac{3}{8}t^8, \ y = \frac{1}{2}t^8, \ z = \frac{\sqrt{11}}{3}t^3, \ t \in [0, 1].$$

$$2) \ \rho(x, y, z) = \sqrt{2y}, \ (C) \ x = t, \ y = \frac{1}{2}t^2, \ z = \frac{1}{3}t^3, \ t \in [0, 1].$$

$$3) \ \rho(x, y, z) = x, \ (C) \ x = \operatorname{ch} t, \ y = \operatorname{sh} t, \ z = t, \ t \in [0, \ln 2].$$

R: 1) $\mathcal{M} = \frac{3}{5} + \frac{11}{100} \ln 11$. 2) $\mathcal{M} = \frac{1}{8} \left[3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right]$.

3) $\mathcal{M} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{15}{16} + \ln 2 \right)$.

10.13 Să se calculeze masa \mathcal{M} și centrul de greutate G ale firelor materiale cu densitățile liniare și reprezentările parametrice următoare:

$$1) \ \rho(x, y) = 1, \ (C) \ x = R \cos t, \ y = R \sin t, \ R > 0, \ t \in [0, \pi].$$

$$2) \ \rho(x, y) = 1, \ (C) \ x = R(t - \sin t), \ y = R(1 - \cos t), \ R > 0, \ t \in [0, \pi].$$

$$3) \ \rho(x, y) = \sqrt{y}, \ (C) \ x = R(t - \sin t), \ y = R(1 - \cos t), \ R > 0, \ t \in [0, 2\pi].$$

$$4) \ \rho(x, y) = 1, \ (C) \ x = R \cos^3 t, \ y = R \sin^3 t, \ R > 0, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

R: 1) $\mathcal{M} = \pi R$, $G \left(0, \frac{2R}{\pi}\right)$. 2) $\mathcal{M} = 4R$, $G \left(\frac{4}{3}R, \frac{4}{3}R\right)$.

3) $\mathcal{M} = 2R\sqrt{2R}\pi$, $G \left(R\pi, \frac{3}{2}R\right)$. 4) $\mathcal{M} = \frac{3}{2}R$, $G \left(\frac{2}{5}R, \frac{2}{5}R\right)$.

10.14 Să se calculeze masa \mathcal{M} și centrul de greutate G ale firelor materiale cu densitățile liniare și reprezentările parametrice următoare:

- 1) $\rho(x, y, z) = 1$, $(C) \ x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in [0, 2\pi]$.
- 2) $\rho(x, y, z) = \frac{|z|}{2}$, $(C) \ x = 4t^5, y = \sqrt{15}t^4, z = 2t^3, t \in [-1, 1]$.

R: 1) $\mathcal{M} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$, $G(0, 0, b\pi)$. 2) $\mathcal{M} = 7$, $G\left(0, \frac{68}{7\sqrt{15}}, 0\right)$.

10.3 Integrale curbilinii de tipul al doilea

10.15 Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă C , indicate:

- 1) $I = \int_C xy \, dx - y^2 \, dy$, $(C) \ x = t^2, y = t^3, t \in [0, 1]$.
- 2) $I = \int_C \sqrt{1 - x^2} \, dx + x \, dy$, $(C) \ x = \cos t, y = 2 \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) $I = \int_C ye^x \, dx$, $(C) \ x = \ln(1 + t^2), y = 2 \arctg t - t, t \in [0, 1]$.
- 4) $I = \int_C x^2 y \, dy - xy^2 \, dx$, $(C) \ x = \sqrt{\cos t}, y = \sqrt{\sin t}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R: 1) Deoarece: $dx = 2t \, dt, dy = 3t^2 \, dt$, avem: $I = \int_0^1 (2t^6 - 3t^8) \, dt = -\frac{1}{21}$.

2) Deoarece: $dx = -\sin t, dy = 2 \cos t \, dt$, obținem $I = \pi$. 3) $I = \pi - \frac{8}{3}$. 4) $I = \frac{\pi}{4}$.

10.16 Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea:

- 1) $I = \int_C \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^3 \sqrt{x^2 + y^2} + y^3 \sqrt{y^2}}$, $(C) \ \begin{cases} x = r \cos^3 t, \\ y = r \sin^3 t, \end{cases} \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 2) $I = \int_C (\arcsin y) \, dx + x^3 \, dy$, $(C) \ \begin{cases} x = -t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases} \ t \in [-1, 1]$.

R: 1) $I = \frac{3\pi}{16} r \sqrt[3]{r}$. 2) $I = \frac{3\pi}{8} - 2$.

10.17 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_C (x + y) \, dx - (x - y) \, dy$, unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine triunghiul cu vârfurile în punctele $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 2)$ și ambele capete în origine.

R: Avem: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, cu: $(C_1) \ x = t, y = t, t \in [0, 1]$, $(C_2) \ x = 2 - t, y = t, t \in [1, 2]$, $(C_3) \ x = 0, y = 2 - t, t \in [0, 2]$. Incât: $I = \int_0^1 2t \, dt + \int_1^2 (-4 + 2t) \, dt + \int_0^2 (-2 + t) \, dt = -2$.

10.18 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_C 2x \, dy - 3y \, dx$, unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine dreptunghiul cu vârfurile în punctele $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$ și ambele capete în punctul A .

R: $I = \frac{35}{2}$.

10.19 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea

$$I = \int_C \frac{dx + dy}{\max\{|x|, |y|\}},$$

unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine triunghiul cu vârfurile în punctele $A(-1, -1)$, $B(2, -1)$, $C(2, 1)$, $D(-1, 1)$ și ambele capete în punctul A .

R: $I = -1$.

10.20 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_C y dx - (x - a) dy$, unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine elipsa:

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

și ambele extremități în origine.

R: O reprezentare parametrică a curbei C este: $x = a(1 + \cos t)$, $y = b \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$. Se obține $I = -2\pi ab$.

10.21 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_C (x^2 - y^2) dx$, unde C este arcul din parabola $y = x^2$ cuprins între punctele $O(0, 0)$ și $A(2, 4)$.

R: $I = -\frac{56}{15}$.

10.22 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea $I = \int_C (x - y^2) dx + 2xy dy$, unde C este curba simplă, închisă și orientată pozitiv, care are drept imagine conturul domeniului plan delimitat de curbele: $y^2 = 8x$, $9x^2 + y^2 = 1$ și $y = 0$, situat în primul cadran.

R: Vârfurile conturului sunt: $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Se obține $I = -\frac{80}{243}$.

10.23 Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă C , indicate:

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= \int_C y dx - x dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz, \quad (C) \quad \begin{cases} x = -t \cos t + \sin t, \\ y = t \sin t + \cos t, \\ z = t + 1, \end{cases} \quad t \in [0, \pi]. \\ 2) \quad I &= \int_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz, \quad (C) \quad \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

R: 1) Deoarece: $dx = t \sin t dt$, $dy = t \cos t dt$, $dz = dt$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2t^2 + 2t + 2$, se obține $I = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi$. 2) $I = -2\pi a(a + b)$.

10.24 Să se calculeze integralele curbilinii de tipul al doilea, pe arcele de curbă \mathcal{C} , indicate:

- 1) $I = \int_{\mathcal{C}} x dx + xy dy + xyz dz$, (\mathcal{C}) $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $t \in [0, 1]$.
 2) $I = \int_{\mathcal{C}} z\sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz$, (\mathcal{C}) $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

R: 1) $I = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$. 2) $I = \frac{a^2b}{2}(\pi - 1)$.

10.25 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea

$$I = \int_{\mathcal{C}} \sqrt{y^2 + z^2} dx + \sqrt{z^2 + x^2} dy + \sqrt{x^2 + y^2} dz,$$

unde \mathcal{C} este curba simplă care are drept imagine segmentul $[AB]$ cu: $A(-1, -1, -1)$ și $B(2, 2, 2)$, iar primul capăt în A .

R: $I = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

10.26 Să se calculeze integrala curbilinie de tipul al doilea

$$I = \int_{\mathcal{C}} (y - 2z) dx - (z - x) dy + (2x - y) dz,$$

unde \mathcal{C} este curba simplă de ecuații: (\mathcal{C}) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x - y + z = 0, \end{cases}$ cu $a > 0$ și ambele capete în punctul $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$.

R: O reprezentare parametrică a curbei \mathcal{C} este:

$$(\mathcal{C}) \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t, \quad y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t, \quad z = \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Se obține $I = \frac{4a^2}{\sqrt{3}}$.

10.4 Independența de drum a integralelor curbilinii

10.27 Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferențială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

$$\begin{array}{ll} 1) I = \int_{(2,1)}^{(1,3)} y dx + x dy. & 2) I = \int_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 e^x dx + 2ye^x dy. \\ 3) I = \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y) dx + (3x + y) dy. & 4) I = \int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy. \end{array}$$

R: 1) Cum $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$ și $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 1$, rezultă că valoarea integralei nu depinde de curba rectificabilă cu capetele în punctele $(2, 1)$ și $(1, 3)$. Fie $A_1(2, 1)$, $A_2(1, 1)$ și $A_3(3, 1)$. Alegem pentru integrare curba simplă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, în care \mathcal{C}_1 are ca imagine segmentul A_1A_2 paralel cu axa Ox , iar \mathcal{C}_2 are ca imagine segmentul A_2A_3 paralel cu axa Oy , având reprezentările parametrice:

$$(\mathcal{C}_1) \begin{cases} x = -t, \\ y = 1, \end{cases} \quad t \in [-2, -1] \quad \text{și} \quad (\mathcal{C}_2) \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \end{cases} \quad t \in [1, 3].$$

Obținem: $I = \int_{\mathcal{C}} y dx + x dy = \int_{\mathcal{C}_1} y dx + x dy + \int_{\mathcal{C}_2} y dx + x dy = -\int_{-2}^{-1} dt + \int_1^3 dt = 1$. Se observă ușor că funcția $U(x, y) = xy$ este o primitivă a expresiei diferențiale $y dx + x dy$, adică $dU = y dx + x dy$ și deci $I = U(1, 3) - U(2, 1) = 1$.

2) $I = -4$. 3) $I = \frac{41}{2}$. 4) $I = 4$.

10.28 Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferențială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

$$\begin{aligned} 1) I &= \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}. & 2) I &= \int_{(\frac{1}{2}, 2)}^{(9,1)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} dy. \\ 3) I &= \int_{(1,2)}^{(-3,-2)} \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{(x-y)^2} dy. & 4) I &= \int_{(\frac{1}{3}, -2)}^{(3,0)} \frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy. \end{aligned}$$

R: 1) $I = \ln \frac{13}{5}$. 2) $I = 2$. 3) $I = 4$. 4) $I = \ln 3$.

10.29 Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferențială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

$$\begin{aligned} 1) I &= \int_{(1,1,0)}^{(2,3,1)} yz dx + xz dy + xy dz. & 2) I &= \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz. \\ 3) I &= \int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. & 4) I &= \int_{(1,-2,2)}^{(0,3,4)} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

R: 1) Cum: $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$, $R(x, y, z) = xy$, avem:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = z,$$

deci expresia de sub semnul integrală este o diferențială exactă și integrala curbilinii nu depinde de drum. Fie $A_1(1, 1, 0)$, $A_2(2, 1, 0)$, $A_3(2, 3, 0)$, $A_4(2, 3, 1)$. Alegem pentru

integrare curba simplă $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, în care \mathcal{C}_1 are ca imagine segmentul A_1A_2 paralel cu axa Ox , \mathcal{C}_2 are ca imagine segmentul A_2A_3 paralel cu axa Oy , \mathcal{C}_3 are ca imagine segmentul A_3A_4 paralel cu axa Oy , având reprezentările parametrice:

$$(\mathcal{C}_1) \begin{cases} x = t, \\ y = 1, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in [1, 2], \quad (\mathcal{C}_2) \begin{cases} x = 2, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases} \quad t \in [1, 3], \quad (\mathcal{C}_3) \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Obținem: $I = \int_1^2 0 dt + \int_1^3 0 dt + \int_0^1 6 dt = 6$. 2) $I = \frac{10}{3}$. 3) $I = 5\sqrt{2}$. 4) $I = \frac{2}{15}$.

10.30 Constatând în prealabil că expresia de sub semnul integrală este o diferențială exactă, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare:

$$\begin{aligned} 1) I &= \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{-yz dx + zx dy + xy dz}{(x - yz)^2}. & 2) I &= \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{y^2 z^2 dx + 2x^2 z dy + 2x^2 y dz}{(2x + yz)^2}. \\ 3) I &= \int_{(-1,3,1)}^{(2,6,3)} \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} dz. & 4) I &= \int_{(-1,1,5)}^{(2,2,4)} \frac{z(dx + dy) - (x + y) dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{R:} \quad 1) I = -\frac{9}{2}. \quad 2) I = \frac{2}{3}. \quad 3) I = 7. \quad 4) I = \frac{\pi}{2}.$$

10.5 Calculul ariei cu ajutorul integralei curbilinii

10.31 Să se calculeze, cu ajutorul integralei curbilinii, aria domeniului plan mărginit de:

- 1) *Elipsa*: $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 2) *Astroida*: $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 3) *Cardioida*: $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
- 4) *Foliul lui Descartes*: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $t \in (0, \infty)$.

$$\mathbf{R:} \quad 1) \text{ Deoarece } x dy - y dx = ab dt, \text{ avem } \mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

$$2) \text{ Deoarece } x dy - y dx = \frac{3a}{4} \sin^2 2t dt, \text{ avem } \mathcal{A} = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \quad 3) \mathcal{A} = 6\pi a^2. \quad 4) \mathcal{A} = \frac{3a^2}{2}.$$

Capitolul 11

Integrale multiple

11.1 Integrala dublă

11.1 Să se calculeze integralele duble:

- 1) $I = \iint_D \ln(x+y) dx dy$, unde: $D = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$.
- 2) $I = \iint_D \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} dx dy$, unde: $D = \left\{ (x, y), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.
- 3) $I = \iint_D (\cos^2 x + \sin^2 y) dx dy$, unde: $D = \left\{ (x, y), 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.
- 4) $I = \iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy$, unde: $D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- 5) $I = \iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, unde: $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

R: 1) Funcția de sub semnul integrală este continuă. Domeniul D este un dreptunghi. Aplicăm formula de reducere la integrale iterate, în ordinea y, x . Avem:

$$I = \int_0^1 dx \int_1^2 \ln(x+y) dy = \int_0^1 [(x+2) \ln(x+2) - (x+1) \ln(x+1) - 1] dx,$$

deci $I = \frac{9}{2} \ln 3 - 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$.

2) Domeniul D este un dreptunghi. Aplicăm formula de reducere la integrale iterate, în ordinea x, y . Avem mai întâi, efectuând schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} dx = \int_0^1 \frac{2 \cos y dt}{t^2 + 2t \sin y + 1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 + \sin y}{\cos y} - 2y = \frac{\pi}{2} - y.$$

Apoi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - y \right) dy = \frac{1}{8} \pi^2.$$

3) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 y) dy = \frac{1}{16} \pi^2$. 4) $I = (e-1)(e^\pi - 1)$. 5) $I = \frac{\pi}{12}$.

11.2 Să se calculeze integralele iterate:

$$\begin{aligned} 1) I &= \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3 + 2xy) dy. & 2) I &= \int_1^2 dx \int_0^1 \frac{1}{x+y} dy. \\ 3) I &= \int_{-1}^1 dx \int_0^1 \frac{y}{1+x^2y^2} dy. & 4) I &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2y}{1+y^2} dy. \end{aligned}$$

R: 1) $I = \frac{3}{4}$. 2) $I = 3 \ln 3 - 4 \ln 2$. 3) $I = \frac{1}{2} \pi - \ln 2$. 4) $I = \frac{1}{12} \pi$.

11.3 Să se calculeze integralele duble:

$$\begin{aligned} 1) I &= \iint_D \frac{y \, dx \, dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ unde: } D = [0, 1] \times [0, 1]. \\ 2) I &= \iint_D x^2 y \cos(xy^2) \, dx \, dy, \text{ unde: } D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2]. \\ 3) I &= \iint_D x^2 y e^{xy} \, dx \, dy, \text{ unde: } D = [0, 1] \times [0, 2]. \\ 4) I &= \iint_D \frac{dx \, dy}{(x+y+1)^2}, \text{ unde: } D = [0, 1] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

R: 1) $I = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. 2) $I = -\frac{\pi}{16}$. 3) $I = 2$. 4) $I = \ln \frac{4}{3}$.

11.4 Să se transforme integrala dublă $I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ în integrale simple iterate, pentru următoarele domenii:

$$\begin{aligned} 1) D &= \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 2x\}. \\ 2) D &= \left\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1, x \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

R: 1) D este un domeniu simplu în raport cu axa Oy :

$$D = \{(x, y), -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, x \in [0, 2]\},$$

deci $I = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) \, dy$.

2) D este un domeniu simplu în raport cu axa Ox :

$$D = \{(x, y), \sqrt{1-\frac{1}{4}y^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, y \in [-2, 2]\},$$

deci $I = \int_{-2}^2 dy \int_{\sqrt{1-\frac{1}{4}y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) \, dx$.

11.5 Să se calculeze următoarele integrale iterate:

$$1) I = \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^x x \, dy. \quad 2) I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \sqrt{xy} \, dy. \quad 3) I = \int_{-R}^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} 3x^2 y^2 \, dx.$$

$$\mathbf{R:} \text{ 1) } I = \frac{4}{3}. \text{ 2) } I = \frac{4}{27}. \text{ 3) } I = 2R^6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^4 t \, dt = \frac{\pi}{8} R^6.$$

11.6 Să se calculeze integrala dublă: $I = \iint_D (x - y) \, dx \, dy$, unde D este domeniul plan mărginit de curbele de ecuații: $y = 2 - x^2$ și $y = 2x - 1$.

$$\mathbf{R:} \text{ } I = \frac{64}{15}.$$

11.7 Să se calculeze integralele duble pe domeniul D mărginit de curbele indicate:

- 1) $I = \iint_D (x + 2y) \, dx \, dy$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.
- 2) $I = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.
- 3) $I = \iint_D (3x^2 - 2xy + y) \, dx \, dy$, $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.
- 4) $I = \iint_D y \ln x \, dx \, dy$, $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.
- 5) $I = \iint_D (\cos 2x + \sin y) \, dx \, dy$, $x = 0$, $y = 0$, $4x + 4y = \pi$.

$$\mathbf{R:} \text{ 1) } I = \frac{76}{3}. \text{ 2) } I = 5. \text{ 3) } I = \frac{244}{21}. \text{ 4) } I = \frac{5}{8} (\ln 4 - 1). \text{ 5) } I = \frac{1}{4} (\pi + 1 - 2\sqrt{2}).$$

11.8 Să se calculeze integralele duble pe domeniul D , unde D este interiorul triunghiului cu vârfurile în punctele indicate:

- 1) $I = \iint_D x \, dx \, dy$, $A(2, 3)$, $B(7, 2)$, $C(4, 5)$.
- 2) $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} \, dx \, dy$, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$.

$$\mathbf{R:} \text{ 1) } I = 26. \text{ 2) } I = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

11.9 Să se calculeze integralele duble:

- 1) $I = \iint_D (1 - y) \, dx \, dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, y \leq x^2, x \geq 0\}$.
- 2) $I = \iint_D (|x| + |y|) \, dx \, dy$, unde: $D = \{(x, y), |x| + |y| \leq 1\}$.
- 3) $I = \iint_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{x}}$, unde: $D = \{(x, y), y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y + 4x \leq 24\}$.

$$\mathbf{R:} \text{ 1) } I = \frac{1}{15}. \text{ 2) } I = \frac{4}{3}. \text{ 3) } I = 15\sqrt{2}.$$

11.10 Să se calculeze integralele duble pe domeniul D mărginit de curbele indicate:

- 1) $I = \iint_D (x + y) \, dx \, dy$, $y = x^2$, $y = x$.
- 2) $I = \iint_D \frac{x^2 dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = \sqrt[3]{2}$, $y = x$.
- 3) $I = \iint_D \arcsin \sqrt{x + y} \, dx \, dy$, $x + y = 0$, $x + y = 1$, $y = -1$, $y = 1$.
- 4) $I = \iint_D \frac{x^3}{y} \, dx \, dy$, $y = 4$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$.

R: 1) $I = \frac{3}{20}$. 2) $I = \frac{1}{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$. 3) $I = \frac{\pi}{4}$. 4) $I = 30$.

11.11 Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{1 + y \cos x}, \text{ unde: } D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \alpha]$$

și apoi să se deducă valoarea integralei:

$$J(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx, \quad \alpha \in (0, 1).$$

R: Integrând în ordinea y, x , avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^\alpha \frac{dy}{1 + y \cos x} = \int_0^\alpha \frac{\ln(1 + \alpha \cos x)}{\cos x} dx = J(\alpha).$$

Schimbând ordinea de integrare și punând $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, y = \cos 2\theta$, obținem:

$$I = \int_0^\alpha dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + y \cos x} = -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{1}{2} \arccos \alpha} \sin 2\theta d\theta \int_0^1 \frac{2}{\sin 2\theta} \frac{d(t \operatorname{tg} \theta)}{1 + t^2 \operatorname{tg}^2 \theta},$$

de unde, $I = J(\alpha) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} (\arccos \alpha)^2$.

11.12 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de parabolele: $y^2 = 10x + 26$ și $y^2 = 10 - 6x$.

R: Parabolele se intersectează în punctele: $(-1, -4)$ și $(-1, 4)$. Considerând domeniul simplu în raport cu aza Ox , putem scrie:

$$D = \left\{ (x, y), \frac{y^2 - 26}{10} \leq x \leq \frac{10 - y^2}{6}, y \in [-4, 4] \right\},$$

deci $\mathcal{A} = \iint_D dxdy = \int_{-4}^4 dy \int_{\frac{y^2 - 26}{10}}^{\frac{10 - y^2}{6}} dx = \frac{1024}{45}$.

11.13 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

R: Considerând domeniul simplu în raport cu axa Oy , avem

$$D = \left\{ (x, y), -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, x \in [-a, a] \right\},$$

deci

$$\mathcal{A} = \iint_D dxdy = \int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dy = 2 \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \pi ab.$$

11.14 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuații $x = y^2 - 2y$, $x + y = 0$.

R: $\mathcal{A} = \frac{1}{6}$.

11.15 Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele de coordonate, planul $x + y = 1$ și paraboloidul eliptic $z = 2x^2 + y^2 + 1$.

R: $D = \{(x, y), 0 \leq y \leq 1 - x, x \in [0, 1]\}$ și deci:

$$\mathcal{V} = \iint_D (2x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy = \frac{3}{4}.$$

11.16 Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele $x = 1$, $z = 0$ și paraboloidul hiperbolic $z = x^2 - y^2$.

R: $D = \{(x, y), -x \leq y \leq x, x \in [0, 1]\}$ și deci

$$\mathcal{V} = \iint_D (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x (x^2 - y^2) dy = \frac{1}{3}.$$

11.17 Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele $y = x$, $y = 0$, $z = 0$ și cilindrul $x^2 + z^2 = a^2$, situat în primul octant.

R: $\mathcal{V} = \int_0^a dx \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy = \frac{1}{3}a^3$.

11.18 Să se calculeze volumul corpului mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

R: $\mathcal{V} = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} c dy = \frac{4}{3} \pi abc$.

11.19 Să se calculeze, trecând la coordonate polare, următoarele integrale duble:

- 1) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- 2) $I = \iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2, x \leq 0\}$.
- 3) $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq ax\}$.
- 4) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax\}$.

R: 1) Trecând la coordonate polare $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, cum $J(r, \theta) = r$, avem:

$$I = \iint_D r^2 dr d\theta, \text{ unde: } D' = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 2, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

și deci: $I = \int_0^2 dr \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{16}{3} \pi$. 2) $I = \int_0^a dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r \sin r^2 d\theta = \frac{1}{2} \pi (1 - \cos a^2)$.

3) Trecând la coordonate polare avem:

$$I = \iint_D r \sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta, \text{ unde: } D' = \left\{ (r, \theta), 0 \leq r \leq a \cos \theta, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

și deci:

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{9} a^3 (3\pi - 4).$$

4) Trecând la coordonate polare avem:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^{2a \cos \theta} r^2 dr = \frac{7}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{14}{9} a^3.$$

11.20 Să se calculeze integrala I pe domeniul D mărginit de curbele de ecuații indicate:

$$\begin{aligned} 1) I &= \iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{9}, \quad x^2 + y^2 = \pi^2. \\ 2) I &= \iint_D dx dy, \quad xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x, \quad y = 3x. \end{aligned}$$

R: 1) Trecând la coordonate polare avem: $D' = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] \times [0, 2\pi]$ și deci:

$$I = \iint_D \sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin r dr = 3\pi.$$

2) Efectuăm schimbarea de variabile: $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$, avem: $J(u, v) = \frac{1}{2v}$.

Rezultă $I = \ln \sqrt{3}$.

11.21 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuații: $xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$), $y = \alpha x$, $y = \beta x$ ($0 < \alpha < \beta$) și situat în primul cadran.

R: Efectuăm schimbarea de variabile: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $D' = [a, b] \times [\alpha, \beta]$. Deoarece $J(u, v) = \frac{1}{2v}$, avem:

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \iint_D \frac{1}{v} du dv = \frac{b-a}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

11.22 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuații: $xy = a$, $xy = b$ ($0 < a < b$), $x^2 = \alpha y$, $x^2 = \beta y$ ($0 < \alpha < \beta$).

$$\mathbf{R:} \mathcal{A} = \frac{b-a}{3} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

11.23 Să se calculeze integralele duble următoare, efectuând schimbări de variabile corespunzătoare:

- 1) $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, unde: $D = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.
- 2) $I = \iint_D \sqrt{(x^2 + y^2)^3} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$.
- 3) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
- 4) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), ax \leq x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- 5) $I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), ax \leq x^2 + y^2 \leq 2ax, y \geq 0\}$.

R: 1) $I = \frac{2}{3}\pi ab$. 2) $I = \frac{1}{5}\pi a^5$. 3) $I = \frac{14}{3}\pi^4$. 4) $I = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$. 5) $I = \frac{14}{9}a^3$.

11.24 Să se calculeze integralele duble următoare, efectuând schimbări de variabile corespunzătoare:

- 1) $I = \iint_D \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\}$.
- 2) $I = \iint_D e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- 3) $I = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- 4) $I = \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$, unde: $D = \{(x, y), e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\}$.

R: 1) $I = 2\pi$. 2) $I = \pi \left(1 - \frac{1}{e^4} \right)$. 3) $I = 2\pi\sqrt{3}$. 4) $I = \pi e^2 (3e^2 - 1)$.

11.25 Să se calculeze următoarele integrale duble:

- 1) $I = \iint_D \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi} dx dy$, unde: $D = \{(x, y), \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$.
- 2) $I = \iint_D \frac{(x^2 + y^2)^{2\pi}}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)^2}} dx dy$, unde: $D = \left\{ (x, y), \frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

R: 1) $I = \pi^3 \left(\frac{7}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \right)$. 2) Trecând la coordonate polare, avem:

$$D' = \left\{ (r, \theta), 0 \leq r \leq \sqrt{\frac{2}{1 + \sin^2 \theta}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

și deci $I = \iint_D \frac{r^3}{\sqrt{4 - r^4}} dr d\theta = 4\arctg \sqrt{2} - \sqrt{2} \ln 3$.

11.26 Să se calculeze volumul corpului limitat de suprafețele de ecuații $z^2 = xy$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $z = 0$.

R: Dacă $D = \{(x, y), \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1\}$, atunci $\mathcal{V} = \iint_D \sqrt{xy} dx dy$. Efectuând schimbarea de variabile: $x = u^2$, $y = v^2$, $(u, v) \in \Delta$, cu

$$\Delta = \{(u, v), 0 \leq u \leq 1 - v, 0 \leq v \leq 1\},$$

cum $J(u, v) = 4uv$, găsim: $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \int_0^1 v^2 (1 - v)^3 dv = \frac{1}{45}$.

11.27 Să se determine masa și coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane omogene ($\rho(x, y) = \text{const.}$), care ocupă un domeniu:

$$\begin{aligned} 1) D &= \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}. \\ 2) D &= \left\{ (x, y), x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq ax, y \geq 0 \right\}, a > 0. \end{aligned}$$

$$\text{R: } 1) \mathcal{M} = \frac{1}{3}a^2b\rho, G\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right). \quad 2) \mathcal{M} = \frac{3}{8}\pi a^2, G\left(-\frac{a}{6}, \frac{14a}{9\pi}\right).$$

11.28 Să se determine coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor plane omogene mărginite de următoarele curbe:

$$\begin{aligned} 1) y^2 &= 4x + 4, y^2 = -2x + 4. \\ 2) 9x^2 + 25y^2 - 225 &= 0, 3x + 5y = 15, x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{R: } 1) G\left(\frac{2}{5}, 0\right). \quad 2) G\left(\frac{10}{3(\pi-2)}, \frac{2}{\pi-2}\right).$$

11.29 Să se determine coordonatele centrului de greutate ale plăcii plane de densitate superficială $\rho(x, y) = y$, mărginită de curbele: $y = x^2$ și $y = 1$.

$$\text{R: } G\left(0, \frac{5}{7}\right).$$

11.30 Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate și în raport cu originea ale plăcii plane de densitate superficială $\rho(x, y) = xy$, care ocupă domeniul

$$D = \{(x, y), x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$$\text{R: } I_x = I_y = \frac{1}{120}, I_0 = \frac{1}{60}.$$

11.31 Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate și în raport cu originea ale plăcilor plane omogene, care ocupă domeniile plane mărginite de următoarele curbe:

$$\begin{aligned} 1) y &= x^2, x = y^2. \\ 2) x^2 + y^2 &= ay, a > 0. \\ 3) \sqrt{x} + \sqrt{y} &= \sqrt{a}, x = 0, y = 0, a > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{R: } 1) I_x &= I_y = \frac{3}{35}, I_0 = \frac{6}{35}. \quad 2) I_x = \frac{5}{64}\pi a^4, I_y = \frac{1}{64}\pi a^4, I_0 = \frac{3}{32}\pi a^4. \quad 3) \\ I_x &= I_y = \frac{1}{84}a^4, I_0 = \frac{1}{42}a^4. \end{aligned}$$

11.32 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oy a plăcii plane de densitate superficială $\rho(x, y) = \frac{1}{x^4}$, care ocupă domeniul mărginit de curbele de ecuații:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a, \sqrt{x} + \sqrt{y} = b, x = \alpha^2 y, x = \beta^2 y, 0 < a < b, 0 < \alpha < \beta.$$

R: Efectuăm schimbarea de variabile: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = u$, $\frac{x}{y} = v$, $D' = [a, b] \times [\alpha^2, \beta^2]$.

Se obține $I_y = 2 \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 \beta^2} \ln \frac{b}{a}$.

11.33 Utilizând formula lui Green, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pe curbele închise C , parcurse în sens direct:

1) $I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy$, unde C este conturul dreptunghiului $D = [1, 4] \times [0, 2]$.

2) $I = \oint_C e^{x^2+y^2} (-y dx + x dy)$, unde C este cercul $x^2 + y^2 = 1$.

3) $I = \oint_C (xy - y) dx + (xy + x) dy$, unde C este frontiera domeniului plan

$D = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$, $a > 0$, $b > 0$.

4) $I = \oint_C (x - y) dx + dy$, unde C este frontiera domeniului plan

$D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$.

5) $I = \oint_C y^2 dx + x^2 dy$, unde C este frontiera domeniului plan

$D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

6) $I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right] dy$, unde

$(C) x = 1 + \cos t$, $y = 1 + \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.

7) $I = \oint_C 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, unde C este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$.

8) $I = \oint_C -y^3 dx + x^3 dy$, unde C este conturul cercului cu centrul în origine și raza egală cu 1.

9) $I = \oint_C e^{-x^2+y^2} [\cos(2xy) dx + \sin(2xy) dy]$, unde $(C) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

R: 1) Deoarece: $P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $Q(x, y) = y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right]$, obținem: $I = \iint_D y^2 dx dy = 8$. 2) $I = 2\pi e$. 3) $I = 2\pi ab$. 4) $I = \frac{1}{2}\pi$. 5) $I = -\frac{4}{3}$.

6) $I = \frac{5}{4}\pi$. 7) $I = -\frac{4}{3}$. 8) $I = \frac{3}{2}\pi$. 9) $I = 0$.

11.2 Aria suprafețelor

11.34 Să se determine aria porțiunii din sfera $(S) x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = ay$.

R: Datorită simetriei, aria cerută este de patru ori aria porțiunii situată în primul octant, pentru care avem:

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad p = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

definită pe $D \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$. Deci $S = 4a \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$.

Trecând la coordonate polare, avem: $D' = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Se obține $S = 2a^2(\pi - 2)$.

11.35 Să se determine aria porțiunii din conul (S) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situată în interiorul cilindrului de ecuație: $x^2 + y^2 = 2x$.

$$\mathbf{R}: S = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D dx dy = \pi\sqrt{2}.$$

11.36 Să se calculeze aria suprafeței:

$$(\mathcal{S}) \quad x = \operatorname{tg} u \cos v, \quad y = \operatorname{tg} u \sin v, \quad z = \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u}{\cos u} + v,$$

$$(u, v) \in \Delta = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, 2\pi].$$

$$\mathbf{R}: S = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv = \frac{8\pi}{3}.$$

11.37 Să se calculeze aria porțiunii din paraboloidul de rotație (S) $z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului: $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\mathbf{R}: S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \frac{\pi}{6} \left[\sqrt{(4r^2 + 1)^3} - 1 \right].$$

11.38 Să se găsească aria porțiunii din paraboloidul eliptic (S) $z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$, $a > 0$, $b > 0$, situată în interiorul cilindrului eliptic: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$.

$$\mathbf{R}: S = \frac{2}{3} \pi ab \left[(1 + c^2) \sqrt{1 + c^2} - 1 \right].$$

11.39 Să se calculeze aria porțiunii din cilindrul parabolic (S) $x^2 = 2z$, mărginită de planele de ecuații: $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

$$\mathbf{R}: S = 13.$$

11.40 Să se găsească aria porțiunii din paraboloidul hiperbolic (S) $x = 1 - y^2 - z^2$, situată în interiorul cilindrului de ecuație: $y^2 + z^2 = 1$.

R: Proiectăm suprafața în planul Oyz :

$$S = \iint_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dy dz = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

11.41 Să se calculeze aria porțiunii din cilindrul parabolic (S) $z = x^2$, mărginită de planele de ecuații: $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$.

$$\mathbf{R}: S = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln (3 + 2\sqrt{2}).$$

11.42 Să se calculeze aria porțiunii din cilindrul (S) $x^2 + z^2 = a^2$, situată în interiorul cilindrului de ecuație: $x^2 + y^2 = a^2$.

R: Datorită simetriei, aria căutată este de opt ori aria porțiunii din primul octant, de ecuație: $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, definită pe domeniul $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$,

$$S = 8a \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = 16a^2.$$

11.3 Integrala de suprafață de primul tip

11.43 Să se calculeze integralele de suprafață de primul tip:

1) $I = \iint_S (x + y + z) dS$, unde S este suprafața cubului ale cărei fețe aparțin planelor de coordonate și planelor $x = 1, y = 1, z = 1$.

2) $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, unde S este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

3) $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, unde S este suprafața laterală a conului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b$.

R: 1) Scriem integrala ca suma integralelor pe cele șase fețe ale cubului. $I = 9$.

2) O reprezentare parametrică a sferei este: $x = a \cos u \cos v, y = a \sin u \cos v, z = a \sin v$, cu $(u, v) \in \Delta = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, iar $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = a^2 \cos v$. Deci:

$$I = a^4 \iint_{\Delta} \cos^3 u \, du dv = \frac{8}{3} \pi a^4.$$

3) O reprezentare parametrică a conului este: $x = av \cos u, y = av \sin u, z = bv$, cu $(u, v) \in \Delta = [0, 2\pi] \times [0, 1]$, iar $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = av\sqrt{a^2 + b^2}$. Deci:

$$I = a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \iint_{\Delta} v^2 \, du dv = \frac{2}{3} \pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$

11.44 Să se calculeze integralele de suprafață de primul tip:

1) $I = \iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS$, unde S este porțiunea din conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

2) $I = \iint_S \frac{z dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$, unde S este porțiunea din paraboloidul $2az = x^2 + y^2$, situată între planele $z = 0$ și $z = h$ ($a > 0, h > 0$).

3) $I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}$, unde: $S = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$.

4) $I = \iint_S z dS$, unde: $S = \{(x, y, z), x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, (u, v) \in \Delta\}$, cu $\Delta = [0, a] \times [0, 2\pi]$.

5) $I = \iint_S (x^2 + y^2) dS$, unde S este suprafața conică $z^2 = x^2 + y^2$, cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 1$.

R: 1) $I = \frac{29}{8} \pi \sqrt{2}$. 2) $I = \pi h^2$. 3) $I = \frac{2}{3} \pi a \sqrt{3} \ln(2 + \sqrt{3})$.

4) $I = \pi^2 [a\sqrt{a^2 + 1} + \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})]$. 5) $I = \frac{1}{2} \pi \sqrt{2}$.

11.45 Să se determine masa suprafeței omogene ($\rho = \rho_0$): $(S) \ z = \frac{1}{h}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq h$, $h > 0$.

$$\mathbf{R:} \mathcal{M} = \rho_0 \iint_S dS = \rho_0 \iint_D \sqrt{1 + \frac{4}{h^2}(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{1}{6} \rho_0 \pi h^2 (5\sqrt{5} - 1), \text{ unde } D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq h^2\}.$$

11.46 Să se determine masa suprafeței $(S) \ z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$, având densitatea superficială $\rho(x, y, z) = z$.

$$\mathbf{R:} \mathcal{M} = \iint_S z dS = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{2}{15} \pi (6\sqrt{3} + 1), \text{ unde } D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

11.47 Să se determine masa suprafeței cubului $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, având densitatea superficială $\rho(x, y, z) = xyz$.

$$\mathbf{R:} \mathcal{M} = \frac{3}{4}.$$

11.48 Să se găsească coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene $z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - x = 0$.

$$\mathbf{R:} G \left(0, 0, \frac{16}{19} \right).$$

11.49 Să se determine masa și coordonatele centrului de greutate ale suprafeței omogene ($\rho = 1$): $(S) \ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

$$\mathbf{R:} \mathcal{M} = \frac{1}{2} \pi (\sqrt{2} - 1) \text{ și } G \left(\frac{1}{4} \sqrt{2}, \frac{1}{4} \sqrt{2}, \frac{1}{\pi} (\sqrt{2} + 1) \right).$$

11.50 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz al suprafeței omogene ($\rho = \rho_0$): $(S) \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

$$\mathbf{R:} I_z = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0.$$

11.51 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz al suprafeței omogene ($\rho = \rho_0$): $(S) \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$, $h > 0$.

$$\mathbf{R:} I_z = \frac{1}{2} \pi h^4 \sqrt{2}.$$

11.4 Integrala de suprafață de tipul al doilea

11.52 Să se calculeze integralele de suprafață de tipul al doilea:

1) $I = \iint_S yz \, dydz + zx \, dzdx + xy \, dxdy$, unde S este fața exterioară a tetraedrului mărginit de planele de coordonate și de planul $x + y + z = a$ ($a > 0$).

2) $I = \iint_S z \, dxdy$, unde S este fața exterioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

3) $I = \iint_S x^2 \, dydz + y^2 \, dzdx + z^2 \, dxdy$, unde S este fața exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$.

R: 1) Scriem integrala ca suma integralelor pe cele patru fețe ale tetraedrului:

$$(\mathcal{S}_z) \quad z = 0, \quad D_z = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a\},$$

$$(\mathcal{S}_x) \quad x = 0, \quad D_x = \{(y, z), y \geq 0, z \geq 0, y + z \leq a\},$$

$$(\mathcal{S}_y) \quad y = 0, \quad D_y = \{(z, x), z \geq 0, x \geq 0, z + x \leq a\},$$

în care perechile \mathcal{S}_z și D_z , \mathcal{S}_x și D_x , \mathcal{S}_y și D_y au orientări diferite, iar \mathcal{S}_0 , fața conținută în planul $x + y + z = a$, a cărei proiecții pe planele de coordonate constă în D_z , D_x , D_y , având aceeași orientare cu \mathcal{S}_0 . Astfel

$$\iint_S xy \, dxdy = \iint_{\mathcal{S}_z} xy \, dxdy + \iint_{\mathcal{S}_0} xy \, dxdy = - \iint_{D_z} xy \, dxdy + \iint_{D_x} xy \, dxdy = 0.$$

Rezultate identice avem pentru ceilalți doi termeni. Deci $I = 0$.

2) Integrala sa reduce la

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dxdy,$$

unde $D_z = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Se obține $I = \frac{4}{3} \pi abc$. 3) $I = \frac{1}{2} \pi a^4$.

11.53 Să se calculeze integralele de suprafață de tipul al doilea:

1) $I = \iint_S y \, dydz + z \, dzdx + 3x \, dxdy$, unde S este fața interioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situată în primul octant.

2) $I = \iint_S x^2 y^2 z \, dxdy$, unde S este fața exterioară a emisferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.

3) $I = \iint_S xz \, dydz + yz \, dzdx + (x^2 + y^2) \, dxdy$, unde S este fața superioară a suprafeței $(S) \quad z = x^2 + y^2$, care se proiectează ortogonal pe planul Oxy în domeniul

$$D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

4) $I = \iint_S \frac{dxdy}{\sqrt{4x^2 + y^2 + 1}}$, unde S este fața exterioară a paraboloidului $(S) \quad z = 4x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.

5) $I = \iint_S x^2 \, dydz + y^2 \, dzdx + z^2 \, dxdy$, unde S este fața exterioară a tetraedrului cu vârfurile în punctele $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

6) $I = \iint_S (x^2 + y^2) z \, dxdy$, unde S este fața exterioară a paraboloidului $(S) \quad z = x^2 + y^2$, situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$.

7) $I = \iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dzdx}{y} + \frac{xdy}{z}$, unde S este fața exterioară a elipsoidului $(S) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

R: 1) Deoarece $\cos \alpha = -\frac{x}{a}$, $\cos \beta = -\frac{y}{a}$, $\cos \gamma = -\frac{z}{a}$, avem

$$I = -\frac{1}{a} \iint_S (xy + yz + 3zx) dS,$$

cu $(S) \ x = a \cos u \sin v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a \cos v$, $(u, v) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece $dS = a^2 \sin v \, du dv$, se obține $I = -2a^3$. 2) $I = \frac{2}{105} \pi R^7$. 3) Versorul normalei la suprafață în punctul $M(x, y, z)$ este $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} (-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})$, a.î.

$$I = \iint_S \frac{(x^2 + y^2)(1 - 2z)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} dS = -\frac{\pi}{6}.$$

4) Deoarece $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+64x^2+4y^2}}$, urmează că $I = -\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4x^2+y^2+1}} = \pi(1 - \sqrt{2})$, unde $D = \{(x, y), 4x^2 + y^2 \leq 1\}$. 5) $I = \frac{1}{12}$. 6) $I = \frac{25}{84} \pi$. 7) O reprezentare parametrică a elipsoidului este $(S) \ x = a \cos u \sin v$, $y = b \sin u \sin v$, $z = c \cos v$, $(u, v) \in \Delta$, cu $\Delta = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Rezultă

$$I = \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right) \iint_{\Delta} \sin v \, du dv = \frac{4\pi}{abc} (b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2).$$

11.54 Utilizând formula lui Stokes, să se calculeze următoarele integrale curbilinii, pe curbele închise C , parcurse în sens direct:

1) $I = \oint_C (x + 3y + 2z) dx + (2x + z) dy + (x - y) dz$, unde C este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

2) $I = \oint_C x^2 y^3 dx + dy + z dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

3) $I = \oint_C (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.

4) $I = \oint_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z \geq 0$.

5) $I = \oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (y - x) dz$, unde C este conturul triunghiului cu vârfurile în punctele $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

6) $I = \oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = ax$ (curba lui Viviani).

7) $I = \oint_C (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$.

8) $I = \oint_C x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, unde $(C) \ x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

9) $I = \oint_C \frac{dx}{1+x^2} + \frac{y dy}{\sqrt{x}} + x dz$, unde $(C) \ x^2 + y^2 = 2x$, $x + y + z = 0$.

R: 1) Deoarece $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 3y + 2z)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$ și $\text{rot } \mathbf{F} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, \mathcal{S} fiind suprafața triunghiului cu vârfurile în punctele $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$ din planul $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} - 1 = 0$ și deci $\mathbf{n} = \frac{1}{7}(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k})$, rezultă $I = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{F}) dS = -5$. 2) $I = -\frac{1}{8}\pi r^6$. 3) $I = 0$. 4) Deoarece $\cos \alpha = \frac{x-2}{2}$, $\cos \beta = \frac{y}{2}$, $\cos \gamma = \frac{z}{2}$, rezultă $I = \iint_D (z - y) dS = 4\pi$. 5) $I = ab + bc + ca$. 6) Avem

$$I = -2 \iint_D \left[x + y + \frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right] dxdy = -\frac{\pi}{4}a^3,$$

cu $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq ax\}$. 7) $I = 4\pi$. 8) $I = -\pi a^2$. 9) $I = -\pi$.

11.5 Integrala triplă

11.55 Să se calculeze integralele triple:

- 1) $I = \iiint_V x^3 y^2 z dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$.
- 2) $I = \iiint_V x^2 dxdydz$, unde $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$.
- 3) $I = \iiint_V z dxdydz$, unde $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$.

R: 1) $I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz = \frac{1}{110}$. 2) Domeniul spațial V este simplu în raport cu axa Oz , deci

$$V = \left\{ (x, y, z), -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \leq z \leq c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, (x, y) \in D, \right\}$$

unde $D = \left\{ (x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$. Deci

$$I = \iint_D dxdy \int_{-c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} x^2 dz = 2c \iint_D x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy.$$

Domeniul plan D este simplu în raport cu axa Oy , deci

$$D = \left\{ (x, y), -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \leq y \leq b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, x \in [-a, a] \right\},$$

încât

$$I = 2c \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy = \pi bc \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \frac{4}{15} \pi a^3 bc.$$

3) $I = \frac{1}{4}\pi abc^2$.

11.56 Să se calculeze integralele triple:

1) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, unde V este tetraedrul delimitat de planele de coordonate și planul $x+y+z=1$.

2) $I = \iiint_V \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^4} dxdydz$, unde $V = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

3) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{(1+x^2+y^2-z)^3}}$, unde

$V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \geq z, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0\}$.

4) $I = \iiint_V z dxdydz$, unde

$V = \{(x, y, z), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, x \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$.

5) $I = \iiint_V x^2 dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

6) $I = \iiint_V \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2} dxdydz$, unde: $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

7) $I = \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} dxdydz$, unde V este domeniul mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = 2x$ și planele $y = 0, z = 0, z = a$ ($a < 0$).

R: 1) Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz :

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dxdy,$$

unde $D = \{(x, y), 0 \leq y \leq 1-x, x \in [0, 1]\}$, deci

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \ln \sqrt{2} - \frac{5}{16}.$$

2) $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{xyz}{(1+x^2+y^2+z^2)^4} dz = \frac{1}{192}$. 3) Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz :

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{x^2+y^2} \frac{dz}{(1+x^2+y^2-z)^{\frac{3}{2}}} = -2 \iint_D \left[1 - (1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \right] dxdy,$$

unde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$. Trecând la coordonate polare, avem $I = 2\pi (2\sqrt{2} - 3)$.

4) $I = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{10}{3}x^3 \right) dx = \frac{7}{192}$. 5) Trecem la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (r, \varphi, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Deoarece $J(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta$, avem

$$I = \left(\int_0^R r^4 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right) = \frac{4}{15} \pi R^5.$$

6) Trecem la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad (r, \theta, \varphi) \in [0, R] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Deoarece $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$, avem

$$I = \int_0^\pi \frac{\pi}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{r^3 \sin^2 \theta \cos \varphi}{r^2 + a^2} dr = \frac{\pi}{8} \left(R^2 + a^2 \ln \frac{a^2}{a^2 + R^2} \right).$$

7) Trecem la coordonate cilindrice: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, $(r, \theta, z) \in V'$, unde $V' = \{(r, \theta, z), 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq a\}$. Deoarece $J(r, \theta, z) = r$, avem

$$I = \iiint_{V'} z r^2 dr d\theta dz = \iint_D dr d\theta \int_0^a z r^2 dz = \frac{a^2}{2} \iint_D r^2 dr d\theta,$$

unde $D' = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, deci

$$I = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^2 dr = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{8a^2}{9}.$$

11.57 Să se calculeze următoarele integrale triple:

1) $I = \iiint_V xyz dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situat în primul octant.

2) $I = \iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de suprafețele $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

3) $I = \iiint_V (2x + 3y - z) dx dy dz$, unde V este prisma triunghiulară mărginită de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = a$, $x + y = b$, cu $a, b > 0$.

4) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^3 dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = 1$ și planele $y = 0$, $y = 1$.

5) $I = \iiint_V \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

6) $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de suprafețele $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

7) $I = \iiint_V (x^2 + y^2) z dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ și sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

8) $I = \iiint_V z dx dy dz$, unde V este domeniul spațial mărginit de conul $z = \frac{a}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ și planul $z = a$, cu $a, R > 0$.

R: 1) $I = \frac{1}{48}$. 2) $I = \frac{1}{364}$. 3) $I = \frac{1}{12}ab^2(10b - 3a)$. 4) $I = \frac{3}{2}\pi$. 5) $I = \frac{8}{9}\pi(2\sqrt{2} - 1)$.
 6) $I = \frac{16}{3}\pi$. 7) $I = \frac{8}{3}\pi$. 8) $I = \frac{1}{4}\pi a^2 R^2$.

11.58 Să se calculeze următoarele integrale triple:

1) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$, unde V este domeniul spațial mărginit de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

2) $I = \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz$, unde $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$.

3) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z > 0\}$.

4) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2\}$, cu $a > 0$.

5) $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$.

6) $I = \iiint_V x^2 dxdydz$, unde V este domeniul spațial mărginit de suprafețele $z = ay^2$, $z = by^2$ cu $y > 0$ și $0 < a < b$ și de suprafețele $z = \alpha x$, $z = \beta x$, $0 < \alpha < \beta$ și $z = h$, $h > 0$.

7) $I = \iiint_V \frac{x dxdydz}{(x^2 + y + z + 1)^3}$, unde $V = \{(x, y, z), x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

8) $I = \iiint_V \frac{z^3 dxdydz}{(y + z)(x + y + z)}$, unde $V = \{(x, y, z), x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

9) $I = \iiint_V \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)} dxdydz$, unde $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$.

10) $I = \iiint_V z dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$.

11) $I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dxdydz$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

12) $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, unde $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \geq 4, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\}$.

13) $I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$, unde V este domeniul spațial mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ și conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

R: 1) Se trece la coordonate sferice. Avem $V' = [1, 2] \times [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $I = 2\pi$. 2) Se trece la coordonate sferice generalizate:

$$\begin{cases} x = ar \cos \varphi \sin \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \theta, \end{cases} \quad (r, \varphi, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Deoarece $J(r, \varphi, \theta) = abcr^2 \sin \theta$, rezultă $I = \frac{4}{5} \pi abc$. 3) $I = \frac{1}{5} \pi a^5 (2 - \sqrt{2})$. 4) $I = \frac{1}{5} \pi a^5 \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right)$. 5) $I = \frac{1}{10} \pi$. 6) $I = \frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}$. 7) $I = \frac{1}{4} \ln \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. 8) $I = \frac{1}{64}$. 9) $I = \frac{1}{4} \pi^2 abc$. 10) $I = 8\pi$. 11) $I = \frac{1}{10} \pi$. 12) $I = 24\pi$. 13) $I = \frac{243}{5} \pi (2 - \sqrt{2})$.

11.59 Să se calculeze, cu ajutorul integralei triple, volumul domeniului spațial

$$V = \{(x, y, z), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - y^2, x + y \leq 1\}.$$

$$\mathbf{R:} \mathcal{V} = \iiint_V dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y^2} dz = \frac{5}{12}.$$

11.60 Să se calculeze, cu ajutorul integralei triple, volumul domeniului spațial mărginit de suprafețele

- 1) $y^2 = 4a^2 - 3ax, y^2 = ax, z = \pm h$.
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$.
- 3) $y = x^2, y = 1, x + y + z = 3, z = 0$.

$$\mathbf{R:} 1) \mathcal{V} = \frac{32}{9} a^2 h. 2) \mathcal{V} = \frac{1}{9} (3\pi - 4) a^3. 3) \mathcal{V} = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{3-x-y} dz = \frac{16}{5}.$$

11.61 Utilizând formula lui Gauss-Ostrogradski, să se calculeze următoarele integrale de suprafață pe suprafețele închise \mathcal{S} ce mărginesc domeniile spațiale V , \mathbf{n} fiind versorul normalei la fața exterioară:

1) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3 y^2 dy dz + x^2 y^3 dz dx + 3z dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial V mărginit de paraboloidii $z = x^2 + y^2, z = 6 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 6$.

2) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = [0, a] \times [0, a] \times [0, a], a > 0$.

3) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, unde \mathcal{S} este sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

4) $I = \iint_{\mathcal{S}} 2x^2 yz dy dz + z^2 dz dx + xyz^2 dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0 \right\}$.

5) $I = \iint_{\mathcal{S}} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera piramidei delimitată de planele $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$.

6) $I = \iint_{\mathcal{S}} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \leq \frac{z^2}{b^2}, 0 \leq z \leq b \right\}$.

7) $I = \iint_{\mathcal{S}} yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera unui domeniu spațial V .

8) $I = \iint_{\mathcal{S}} xyz (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

9) $I = \iint_{\mathcal{S}} x^3 dy dz + x^2 y dz dx + x^2 z dx dy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq a\}, a > 0$.

10) $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, unde \mathcal{S} este sfera $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

11) $I = \iint_S x dydz + y dzdx + \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial $V = \left\{ (x, y, z), x^2 + y^2 + z \leq \frac{1}{4}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \right\}$.

12) $I = \iint_S y^2 z dydz + xz dzdx + x^2 dxdy$, unde \mathcal{S} este frontiera domeniului spațial V mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$, cilindrul $x^2 + y^2 = 1$, situat în primul octant.

13) $I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, unde \mathcal{S} este frontiera tetraedrului cu vârfurile în punctele $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

R: 1) Deoarece $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3 y \mathbf{i} + x^2 y^3 \mathbf{j} + 3z \mathbf{k}$ și $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3(2x^2 y^2 + 1)$, putem scrie

$$I = \iiint_V (\operatorname{div} \mathbf{F}) d\tau = 3 \iiint_V (2x^2 y^2 + 1) dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2 y^2 + 1) dz,$$

unde $D = \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 3\}$. Se obține $I = \frac{297}{8}\pi$. 2) $I = 3a^4$. 3) $I = \frac{12}{5}\pi a^5$. 4) $I = \frac{3}{2}\pi abc^2$. 5) $I = \frac{1}{2}a^3$. 6) $I = \frac{1}{2}\pi a^2 b^2$. 7) $I = 0$. 8) $I = \frac{1}{8}a^6$. 9) $I = \frac{5}{4}\pi a R^4$. 10) $I = \frac{8}{3}\pi R^3(a + b + c)$. 11) $I = \frac{1}{96}\pi \left(\frac{8}{3+2\sqrt{2}} - \frac{20}{9+4\sqrt{5}} \right)$. 12) $I = \frac{1}{8}\pi$. 13) $I = \frac{1}{12}$.

11.62 Să se calculeze masa cubului de densitate $\rho(x, y, z) = x + y + z$, care ocupă domeniul spațial $V = [0, a] \times [0, a] \times [0, a]$, $a > 0$.

R: $\mathcal{M} = \frac{3}{2}a^4$.

11.63 Să se calculeze masa corpului de densitate $\rho(x, y, z) = x$, care ocupă domeniul spațial V mărginit de suprafețele $x^2 = 2y$, $y + z = 1$, $2y + z = 2$.

R: $\mathcal{M} = \frac{8}{35}\sqrt{2}$.

11.64 Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spațial

$$V = \left\{ (x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}.$$

R: $G \left(\frac{3a}{8}, \frac{3b}{8}, \frac{3c}{8} \right)$.

11.65 Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spațial mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 = z$, $x + y + z = 0$.

R: $G \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6} \right)$.

11.66 Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spațial

$$V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 2z, x + y \geq z\}.$$

R: $G\left(1, 1, \frac{5}{3}\right).$

11.67 Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului omogen care ocupă domeniul spațial

$$V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq a^2, z \geq by, z \geq 0\}, b > 0.$$

R: $G\left(0, \frac{3}{16}\pi a, \frac{3}{32}\pi ab\right).$

11.68 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz al corpului omogen ($\rho = 1$), care ocupă domeniul spațial mărginit de suprafețele $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$.

R: $I_z = \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5).$

11.69 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axele de coordonate și în raport cu originea ale piramidei omogene ($\rho = 1$), mărginită de planele de coordonate și de planul $x + y + z = 1$.

R: $I_x = I_y = I_z = \frac{1}{30}, I_0 = \frac{1}{20}.$

11.70 Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate ale corpului omogen ($\rho = 1$), care ocupă domeniul spațial mărginit de suprafețele $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $c > 0$.

R: $I_{yz} = \frac{1}{5}\pi a^3 bc, I_{zx} = \frac{1}{5}\pi ab^3 c, I_{xy} = \frac{1}{5}\pi abc^3.$

11.71 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa Oz al corpului omogen ($\rho = 1$), care ocupă domeniul spațial

$$V = \left\{(x, y, z), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}, 0 \leq z \leq h\right\}, h > 0.$$

R: $I_z = \frac{1}{5}\pi \frac{ab}{c^2} h^5.$

11.72 Să se calculeze momentul de inerție în raport cu planul Oxy al corpului având densitatea $\rho(x, y, z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + 2z^2 + a^2)^2}$, care ocupă domeniul spațial

$$V = \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq a\}, a > 0.$$

$$\mathbf{R}: I_{xy} = \frac{1}{12} \pi a^2 \ln \left(\frac{16^3}{27} a^4 \right).$$

11.73 *Să se calculeze momentul de inerție în raport cu originea al corpului omogen mărginit de sfera de rază 2 cu centrul în origine.*

$$\mathbf{R}: I_0 = \frac{128}{5} \pi.$$

Capitolul 12

Ecuatii diferențiale ordinare

12.1 Ecuatii diferențiale de ordinul întâi

12.1 Să se integreze ecuația $(t^2 - x^2) dt - 2tx dx = 0$ și apoi să se determine curba integrală care trece prin punctul $(1, 1)$.

R: Avem $P(t, x) = t^2 - x^2$, $Q(t, x) = -2tx$ și $P_x = Q_t = -2x$, deci membrul stâng al ecuației date este o diferențială exactă. Atunci integrala generală este dată de

$$\int_{t_0}^t (\tau^2 - x_0^2) d\tau - 2 \int_{x_0}^x t\xi d\xi = C, \quad (t_0, x_0) \in D.$$

sau $\frac{1}{3}t^3 - tx^2 = C$. Soluția particulară care satisface condiția inițială dată este $t^3 - 3tx^2 + 2 = 0$.

12.2 Să se găsească integrala particulară a ecuației $\left(t + e^{\frac{t}{x}}\right) dt + e^{\frac{t}{x}} \left(1 - \frac{t}{x}\right) dx = 0$, care verifică condiția inițială $x(0) = 2$.

R: $\frac{1}{2}t^2 + xe^{\frac{t}{x}} = 2$.

12.3 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale care provin din anularea unei diferențiale exacte:

- 1) $(3t^2 + 6tx^2) dt + (6t^2x + 4x^3) dx = 0$.
- 2) $(t + x) dt + (t + 2x) dx = 0$.
- 3) $(t^2 + 2t + x^2) dt + 2tx dx = 0$.
- 4) $(t^3 - 3tx^2 + 2) dt - (3t^2x - x^2) dx = 0$.
- 5) $(e^t + x + \sin x) dt + (e^x + t + t \cos x) dx = 0$.
- 6) $(t + x - 1) dt + (e^x + t) dx = 0$.
- 7) $\left(\frac{x}{t^2 + x^2} - x\right) dt + \left(e^x - t - \frac{t}{t^2 + x^2}\right) dx = 0$.
- 8) $\left(\operatorname{tg} x - \frac{x}{\sin^2 t}\right) dt + \left(\operatorname{ctg} t + \frac{t}{\cos^2 x}\right) dx = 0$.

- R:** 1) $t^3 + 3t^2x^2 + x^4 = C$. 2) $\frac{1}{2}t^2 + tx + x^2 = C$. 3) $\frac{1}{3}t^3 = tx^2 + x^2 = C$.
 4) $\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2x^2 + 2t + \frac{1}{3}x^3 = C$. 5) $e^t + tx + t \sin x + e^x = C$. 6) $e^x + \frac{1}{2}t^2 + tx - t = C$.
 7) $\operatorname{arctg} \frac{t}{x} - tx + e^x = C$. 8) $t \operatorname{tg} x + x \operatorname{ctg} t = C$.

12.4 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale care provin din anularea unei diferențiale exacte:

- 1) $(e^{t+x} + 3t^2) dt + (e^{t+x} + 4x^3) dx = 0$, cu $x(0) = 0$.
 2) $(\arcsin t + 2tx) dt + (t^2 + 1 + \operatorname{arctg} x) dx = 0$.
 3) $(\ln x - 5x^2 \sin 5t) dt + \left(\frac{t}{x} + 2x \cos 5t\right) dx = 0$, cu $x(0) = e$.
 4) $[\sin x + (1-x) \cos t] dt + [(1+t) \cos x - \sin t] dx = 0$.
 5) $(2txe^{t^2} + \ln x) dt + \left(e^{t^2} + \frac{t}{x}\right) dx = 0$, cu $x(0) = 1$.
 6) $(t+x+1) dt + (t-x^2+3) dx = 0$.
 7) $(\sin tx = tx \cos tx) dt + t^2 \cos tx dx = 0$.
 8) $(t^3 + tx^2) dt + (t^2x + x^3) dx = 0$.

- R:** 1) $e^{t+x} + t^3 + x^4 = 1$. 2) $t \arcsin t + \sqrt{1-t^2} + t^2x + x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} + x = C$.
 3) $t \ln x + x^2 \cos 5t = e^2$. 4) $(1+t) \sin x + (1-x) \sin t = C$. 5) $xe^{t^2} + t \ln x = 1$.
 6) $\frac{1}{2}t^2 + t + tx - \frac{1}{3}x^3 = 3x = C$. 7) $t \sin tx = C$. 8) $t^4 + 2t^2x^2 + x^4 = C$.

12.5 Să se determine soluția ecuației $(x^2 + 1)dt + (2t + 1)x^2 dx = 0$, care trece prin punctul $(1, 0)$.

R: Separând variabilele, avem $\frac{1}{2t+1} dt + \frac{x^2}{x^2+1} dx = 0$, cu soluția generală

$$\frac{1}{2} \ln(2t+1) + x - \operatorname{arctg} x = C.$$

Soluția particulară care satisface condiția dată este $\frac{1}{2} \ln(2t+1) + x - \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2} \ln 3$.

12.6 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile:

- 1) $x dt + t dx = 0$. 2) $tx' - x = x^3$.
 3) $txx' = 1 - t^2$. 4) $\operatorname{tg} t \sin^2 x dt + \operatorname{ctg} x \cos^2 t dx = 0$.
 5) $dx = (t^2 + 1)(x^2 + 1) dt$. 6) $(t^2 - 1)x' - tx = 0$.
 7) $x' + \sin(t+x) = \sin(t-x)$. 8) $x' = \operatorname{sh}(t+x) + \operatorname{sh}(t-x)$.

R: 1) Ecuația se mai scrie, separând variabilele: $\frac{1}{t} dt + \frac{1}{x} dx = 0$. De unde $\ln|t| + \ln|x| = \ln|C|$, sau $tx = C$.

2) $t^2(1+x^2) = Cx^2$. 3) $x^2 - 2 \ln t + t^2 = C$. 4) $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 t + C$.

5) $x = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{3}t^3 + t + C \right)$. 6) $x^2 = C(t^2 - 1)$. 7) $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2 \sin t = C$.

8) $x = \ln[\operatorname{tg}(\operatorname{ch} t + C)]$.

12.7 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile, cu condițiile inițiale precizate:

- 1) $(1 + e^t)xx' = e^t$, cu $x(0) = 1$.
- 2) $(1 + e^{2t})x^2dx = e^tdt$, cu $x(0) = 0$.
- 3) $x' + \cos(t + 2x) = \cos(t - 2x)$, cu $x(0) = \frac{\pi}{4}$.
- 4) $e^{1+t^2} \operatorname{th} x dt - \frac{1}{t-1} e^{2t} dx = 0$, cu $x(1) = \frac{\pi}{2}$.
- 5) $x' = e^{t+x} + e^{t-x}$, cu $x(0) = 0$.
- 6) $x(t+2)dt + t(x-1)dx = 0$, cu $x(1) = 1$.
- 7) $t(x^6 + 1)dt + x^2(t^4 + 1)dx = 0$, cu $x(0) = 1$.

R: 1) $x^2 = 1 + 2 \ln \frac{1+e^t}{2}$. 2) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^t$. 3) $\ln |\operatorname{tg} x| = 4(1 - \cos t)$.
 4) $\ln \sin^2 x = e^{(x-1)^2} - 1$. 5) $x = \ln \left(e^t + \frac{\pi}{4} - 1 \right)$. 6) $t + x + 2 \ln t - \ln x = 2$.
 7) $3 \operatorname{arctg} t^2 + 2 \operatorname{arctg} x^3 = \frac{\pi}{2}$.

12.8 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale cu variabile separabile:

- 1) $(\cos t - \sin t + 1)x' = \cos x - \sin x - 1$.
- 2) $2t\sqrt{1-x^2} = x'(1+t^2)$.
- 3) $e^t \sin^3 x + (1 + e^{2t})(\cos x)x' = 0$.
- 4) $x^2(\sin t) + (\cos^2 t)(\ln x)x' = 0$.
- 5) $x' = \sin(t-x)$.
- 6) $x + tx' = a(1+tx)$.
- 7) $(tx-1)^2 tx' + (t^2x^2+1)x = 0$.
- 8) $t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2}x' = 0$.

R: 1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = C \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right)$. 2) $x = \sin [C \ln (1+t^2)]$.
 3) $\operatorname{arctg} e^t = \frac{1}{2 \sin^2 x} + C$. 4) $x = (1 + \ln x + Cx) \cos t$. 5) $t + C = \operatorname{ctg} \left(\frac{x-t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.
 6) $1 + tx = Ce^{at}$. 7) Cu schimbarea de funcție $u = tx$, obținem $x^2 = Ce^{tx - \frac{1}{tx}}$.
 8) $\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1+x^2} = C$.

12.9 Să se determine un factor integrant și să se integreze ecuația

$$(t^3 \sin x - 2x)dt + (t^4 \cos x + t)dx = 0.$$

R: Avem $P_x = t^3 \cos x - 2$, $Q_t = 4t^3 \cos x + 1$ și deci

$$\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = -\frac{3}{t}$$

este funcție numai de t . Ca atare avem $\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dt} = -\frac{3}{t}$ și o soluție particulară este $\mu = \frac{1}{t^3}$.
 Înmulțind ecuația cu μ , obținem

$$\left(\sin x - \frac{2x}{t^3} \right) dt + \left(t \cos x + \frac{1}{t^2} \right) dx = 0$$

a cărei soluție generală este $t \sin x + \frac{x}{t^2} = C$.

12.10 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale știind că admit un factor integrant de forma $\mu = \mu(t)$:

- 1) $\left(2tx + t^2x + \frac{1}{3}x^3\right) dt + (t^2 + x^2) dx = 0.$
- 2) $(t + x^2) dt - 2tx dx = 0.$
- 3) $(t \sin x + x \cos x) dt + (t \cos x - x \sin x) dx = 0.$
- 4) $(t + \sin t + \sin x) dt + \cos x dx = 0.$

R: 1) $\mu = e^t, xe^t \left(t^2 + \frac{1}{3}x^2\right) = C.$ 2) $\mu = \frac{1}{t^2}, \ln|t| - \frac{1}{t}x^2 = C.$

3) $\mu = e^t, (t \sin x + x \cos x - \sin x) e^t = C.$

4) $\mu = e^t, 2e^t \sin x + 2e^t(t - 1) + e^t(\sin t - \cos t) = C.$

12.11 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale știind că admit un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$:

- 1) $x(1 + tx) dt - t dx = 0.$
- 2) $x dt - (t + x^2) dx = 0.$
- 3) $2tx(\ln x) dt + (t^2 + x^2\sqrt{1 + x^2}) dx = 0.$
- 4) $(1 + 3t^2 \sin x) dt - t \operatorname{ctg} x dx = 0.$

R: 1) $\mu = \frac{1}{x^2}, \frac{t}{x} + \frac{1}{2}t^2 = C.$ 2) $t = x(x + C).$

3) $\mu = \frac{1}{x}, t^2 \ln|x| + \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$ 4) $\mu = \frac{1}{\sin x}, \frac{t}{\sin x} + t^3 = C.$

12.12 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale știind că admit un factor integrant de forma indicată:

- 1) $(t - x) dt + (t + x) dx = 0, \mu = \mu(t^2 + x^2).$
- 2) $tx^2 dt + (t^2x - t) dx = 0, \mu = \mu(tx)$
- 3) $(2t^3 + 3t^2x + x^2 - x^3) dt + (2x^3 + 3tx^2 + t^2 - t^3) dx = 0, \mu = \mu(t + x).$
- 4) $(t^2 + x^2 + 1) dt - 2tx dx = 0, \mu = \mu(x^2 - t^2).$
- 5) $(t - tx) dt + (t^2 + x) dx = 0, \mu = \mu(t^2 + x^2).$
- 6) $(3t + 2x + x^2) dt + (t + 4tx + 5x^2) dx = 0, \mu(t + x^2).$

R: 1) $\mu = \frac{1}{t^2 + x^2}, \frac{1}{2} \ln(t^2 + x^2) - \operatorname{arctg} \frac{t}{x} = C.$ 2) $tx - \ln|x| = C.$

3) $t^3 + tx + x^3 = C(t + x).$ 4) $\mu = (x^2 - t^2 + 1)^{-2}, x^2 - t^2 + 1 = Cx.$

5) $\mu = (t^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}, x - 1 = C\sqrt{t^2 + x^2}.$ 6) $\mu = t + x^2, (t + x)(t + x^2)^2 = C.$

12.13 Să se găsească soluția ecuației omogene $t^2 + 2x^2 = txx'$, care satisface condiția inițială $x(1) = 2.$

R: Cu schimbarea de variabilă $x = ty$, ecuația devine $\frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{dt}{t}$, cu soluția generală $t = C\sqrt{1 + y^2}$. Înlocuind pe y , avem $t^2 = C\sqrt{t^2 + x^2}$. Condiția inițială determină pe $C = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Soluția particulară căutată este $t^2\sqrt{5} = \sqrt{t^2 + x^2}$.

12.14 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale omogene:

$$\begin{array}{lll} 1) tx' = x - t. & 2) tx' = x + t e^{\frac{x}{t}}. & 3) tx' = -t - x. \\ 4) t^2 x' = x(t - x). & 5) tx' = x + t \operatorname{tg} \frac{x}{t}. & 6) (t - x)x' = t + x. \\ 7) tx' = x + t \cos^2 \frac{x}{t}. & 8) 2t^2 x' = t^2 + x^2. & 9) txx' + 2tx + t^2 = 0. \end{array}$$

R: 1) Prin schimbarea de funcție $x = ty$ ecuația se transformă într-o ecuație cu variabile separabile: $y' = -\frac{1}{t}$, de unde $x = t \ln \frac{C}{t}$.

2) Se obține $ty' = e^y$, de unde $x = -t \ln \ln \frac{C}{t}$.

3) Se obține $ty' = -1 - 2y$, de unde $x = \frac{C}{t} - \frac{t}{2}$. 4) $t = Ce^{\frac{x}{t}}$.

5) $\sin \frac{x}{t} = Ct$. 7) $\operatorname{tg} \frac{x}{t} = \ln(Ct)$. 8) $2t = (t - x) \ln(Ct)$. 9) $\ln |t + x| + \frac{t}{t + x} = C$.

12.15 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale omogene, cu condițiile inițiale precizate:

$$\begin{array}{l} 1) tx' \sin \frac{x}{t} + t = x \sin \frac{x}{t}, \text{ cu } x(1) = 0. \\ 2) t^2 x' = x^2 + tx + t^2, \text{ cu } x(1) = 2. \\ 3) 4tx(t^2 + x^2)x' + x^4 + 6t^2 x^2 + t^4, \text{ cu } x(1) = 0. \\ 4) \left(x - 3t \sin \frac{3t}{x}\right)x' + 3x \sin \frac{3t}{x} = 0, \text{ cu } x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1. \end{array}$$

R: Avem:

$$1) te = e^{\cos \frac{x}{t}}. \quad 2) \operatorname{arctg} \frac{x}{2t} - 2 \ln |t| = \frac{\pi}{4}. \quad 3) t^5 + 10t^3 x^2 + 5tx^4 = 1. \quad 4) \ln |x| - \cos \frac{3t}{x} = 1.$$

12.16 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale reductibile la ecuații omogene:

$$\begin{array}{ll} 1) (t + x - 3)x' = t - x + 1. & 2) (t - 2x + 3)x' = 2t - 4x + 1. \\ 3) (t - x + 4)x' + t + x - 2 = 0. & 4) (2t + 2x - 1)x' + t + x + 1 = 0. \\ 5) (t - x - 2)x' + t + x = 0. & 6) (3t - 7x - 3)x' = 3x - 7t + 7. \\ 7) (3t + 2x - 5)x' + 2t + 3x - 5 = 0. & 8) (4t + 2x + 1)x' + 8t + 4x + 1 = 0. \\ 9) (t - 2x + 3)x' + 2t + x - 1 = 0. & 10) (6t + 2x - 10)x' = 2t + 9x - 20. \end{array}$$

R: 1) $t^2 - 2tx - x^2 + 2t + 6x = C$. 2) $(1 - 3t + 6x)^{\frac{10}{9}} e^{\frac{4t-2x}{3}} = C$.

3) $t^2 + 2tx - x^2 - 4t + 8x = C$. 4) $t + 2x + 3 \ln |t + x - 2| = C$.

5) $x^2 - 2tx - t^2 + 4x = C$. 6) $(t + x - 1)^5 (t - x - 1)^2 = C$.

7) $x^2 + 3tx + t^2 - 5t - 5x = C$. 8) $(4t + 2x + 1)^2 = 4t + C$.

9) $t^2 + tx - x^2 - t + 3x = C$. 10) $(x - 2t)^2 = C(t + 2x - 5)$.

12.17 Să se integreze ecuația liniară neomogenă $x' = x \operatorname{tg} t + \cos t$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$.

R: Ecuația omogenă corespunzătoare, $x' = x \operatorname{tg} t$, are soluția generală $x(t) = C \cdot \frac{1}{\cos t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}$. Căutăm pentru ecuația neomogenă o soluție particulară de forma

$x^*(t) = u(t) \cdot \frac{1}{\cos t}$. Se obține pentru u ecuația $u' = \cos^2 t$, de unde $u(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t$.
In consecință, soluția generală a ecuației date este

$$x(t) = C \cdot \frac{1}{\cos t} + \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t\right) \cdot \frac{1}{\cos t}, \quad t \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}.$$

12.18 Să se integreze următoarele ecuații liniare de ordinul întâi:

- 1) $x' - x \operatorname{ctg} t + 2t \sin t = 0$. 2) $(1 + t^2)x' + x - \operatorname{arctg} t = 0$.
 3) $x' + ax - be^{pt} = 0$, $a, b, p \in \mathbf{R}$. 4) $tx' - \frac{1}{t+1}x - t + 1 = 0$.
 5) $(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}x't^3 + 3tx\sqrt{t^2 - 1} = 0$. 6) $\sqrt{1 + t^2}x' + x + t - \sqrt{1 + t^2} = 0$.
 7) $t(t^3 + 1)x' + (2t^3 - 1)x = \frac{t^3 - 2}{t}$. 8) $x' - \frac{n}{t+1}x = e^t(t+1)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

- R:** 1) $x(t) = t^2 \sin t + C \sin t$. 2) $x(t) = \operatorname{arctg} t - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} t}$.
 3) $x(t) = \frac{b}{a+p}e^{pt} + Ce^{-at}$, pentru $p \neq -a$ și $x(t) = (bt + C)e^{-at}$, pentru $p = -a$.
 4) $x(t) = t + 1 + \frac{C}{t+1}e^t$. 5) $x(t) = \frac{1}{4}(C - t^4)(t^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$.
 6) $x(t) = \frac{1}{t + \sqrt{1 + t^2}}(\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + C)$.
 7) $x(t) = \frac{1}{t} + \frac{Ct}{t^3 + 1}$. 8) $x(t) = (e^t + C)(t + 1)^n$.

12.19 Să se integreze următoarele ecuații liniare de ordinul întâi, cu condițiile inițiale precizate:

- 1) $x' = \frac{x}{1 - t^2} - t - 1$, $cu \ x(0) = 0$. 2) $tx' + x = e^t$, $cu \ x(a) = b \ (a \neq 0)$.
 3) $tx' - nx = t^{n+1} \ln t$, $cu \ x(1) = 0$. 4) $x' \cos^2 t + x - \operatorname{tg} t = 0$ $cu \ x(0) = 0$.
 5) $tx' - nx = t^{n+1}e^t$, $cu \ x(1) = 1$. 6) $tx' + (2t^2 - 1)x = 2t^2 - 1$, $cu \ x(1) = 1 - \frac{1}{e}$.

- R:** 1) $x(t) = \left(\frac{1}{2}t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} t\right) \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$. 2) $x(t) = \frac{1}{t}(e^t - e^a + ab)$.
 3) $x(t) = \frac{1}{4}(t^n - t^{n+2}) + \frac{1}{2}t^{n+2} \ln |t|$. 4) $x(t) = -1 + \operatorname{tg} t + e^{-\operatorname{tg} t}$.
 5) $x(t) = t^n(e^t - e + 1)$. 6) $x(t) = 1 - te^{-t^2}$.

12.20 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Bernoulli:

- 1) $tx' + x + t^t x^2 = 0$. 2) $2txx' - x^2 + t = 0$.
 3) $3tx' = x(1 + t \sin t - 3x^3 \sin t)$. 4) $x' = 2tx + t^3 \sqrt{x}$.
 5) $x' = tx - tx^3$. 6) $tx' + x = x^2 \ln t$.
 7) $3tx^2 x' - 2x^3 = t^3$. 8) $2x' \sin t + x \cos t = x^3 \sin^2 t$.

- R:** 1) $x(t^2 + Ct) = 1$. 2) $x^2 = t \ln \frac{C}{t}$. 3) $x^3(3 + Ce^{\cos t}) = t$.
 4) $x = \left(Ce^{\frac{t^2}{2}} - \frac{t^2 + 2}{2} \right)^2$. 5) $(1 + Ce^{-t^2})x^2 = 1$. 6) $x(1 + Ct + \ln t) = 1$.
 7) $x^3 = t^3 + Ct^2$. 8) $x^2(C - t) \sin t = 1$.

12.21 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Bernoulli:

- 1) $3t^2 dt = (t^3 + e^x) dx$. 2) $tx dt + (t^2 + x^2 + 1) dx$.
 3) $tx' + x = t^3 x^4$. 4) $(t^2 \ln x - t) dx = x dt$.
 5) $tx' + 2x = 3t^3 x^{\frac{4}{3}}$. 6) $x' - \frac{2t}{1 + t^2} x = 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + t^2}} \operatorname{arctg} t$.

- R:** 1) $t^3 e^{-x} = x + C$. 2) $x^4 + 2t^2 x^2 + 2x^2 = C$. 3) $tx \sqrt[3]{3 \ln \frac{C}{t}} = 1$.
 4) $t(1 - Cx + \ln x) = 1$. 5) $x^{-\frac{1}{3}} = Ct^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}t^3$. 6) $x(t) = (1 + t^2)(C + \operatorname{arctg}^2 t)^2$.

12.22 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Bernoulli, cu condițiile inițiale precizate:

- 1) $x' + x = e^{\frac{t}{2}} \sqrt{x}$, cu $x(0) = \frac{9}{4}$.
 2) $(t^3 + 1)x' + 3t^2 x = x^2(t^3 + 1)^2 \sin t$, cu $x(0) = 1$.
 3) $(x^2 + 2x + t^2)x' + 2t = 0$, cu $x(1) = 0$.
 4) $2(t^2 - 1)xx' - tx^2 = t(t^2 - 1)$, cu $x(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.
 5) $x' - x \cos t = x^{n-1} \sin 2t$, $n \neq 1$, $n \in \mathbf{N} \setminus \{1, 2\}$, cu $x(\pi) = 1$.

- R:** 1) $x(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{2} e^t + 1 \right)^2$. 2) $x(t) = \frac{1}{(t^3 + 1) \cos t}$. 3) $t^2 + x^2 = e^{-x}$.
 4) $x^2 = t^2 - 1 + \sqrt{t^2 - 1}$. 5) $x^{1-n} = 2 \sin t + \frac{2}{n-1} + \frac{n-3}{n-1} e^{(n-1) \sin t}$.

12.23 Să se arate că ecuațiile diferențiale de tip Riccati de forma $t^2 x' = at^2 x^2 + btx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, admit soluții particulare de forma $x^*(t) = \alpha t^{-1}$, dacă $(b+1)^2 - 4ac \geq 0$. Să se integreze apoi ecuațiile diferențiale:

- 1) $2t^2 x' = t^2 x^2 + 1$. 2) $4t^2(x' + x^2) + 1 = 0$.
 3) $t^2 x' + (2 - tx)^2 = 0$. 4) $t^2 x' = t^2 x^2 + tx + 1$.

R: Intr-adevăr, $x^*(t) = \alpha t^{-1}$ este soluție dacă $a\alpha^2 + (b+1)\alpha + c = 0$, ecuație care are rădăcini reale dacă $(b+1)^2 - 4ac \geq 0$. 1) O soluție particulară este $x^*(t) = -t^{-1}$. Efectuând schimbarea de funcție $x = -\frac{1}{t} + \frac{1}{y}$, obținem ecuația liniară $2t^2 y' = 2ty - t^2$,

a cărei soluție generală este: $y(t) = \frac{t}{2}(C - \ln t)$. Deci, $x(t) = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t(C - \ln |t|)}$.

- 2) $x(t) = \frac{1}{2t} + \frac{1}{t(C + \ln |t|)}$. 3) $x(t) = \frac{1}{t} + \frac{3t^2}{t^3 + C}$. 4) $x(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t(C - \ln |t|)}$.

12.24 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Riccati, știind că admit soluțiile particulare indicate:

- 1) $x' - x^2 + 2e^t x = e^t + e^{2t}$, $x^*(t) = e^t$.
- 2) $tx' - x^2 + (2t + 1)x = t^2 + 2t$, $x^*(t) = t$.
- 3) $x' + x^2 \sin t = 2 \frac{\sin t}{\cos^2 t}$, $x^*(t) = \frac{1}{\cos t}$.
- 4) $(t^2 - 1)x' + x^2 - 2tx + 1 = 0$, $x^*(t) = t$.
- 5) $t^2 x' + t^2 x^2 + tx = 4$, $x^*(t) = \frac{2}{t}$.
- 6) $(1 + t^3)x' - x^2 - t^2 x = 2t$, $x^*(t) = t^2$.
- 7) $x' - x^2 - \frac{1}{t}x + 9t^2 = 0$, $x^*(t) = 3t$.
- 8) $t^2(x' + x^2) - 2(tx - 1) = 0$, $x^*(t) = \frac{2}{t}$.

R: 1) $x(t) = e^t + \frac{1}{C - t}$. 2) $x(t) = t + \frac{1}{Ct + 1}$. 3) $x(t) = \frac{1}{\cos t} + \frac{3 \cos^2 t}{3C - \cos^3 t}$.
 4) $\frac{1}{x - t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C$. 5) $x(t) = \frac{2}{t} + \frac{4}{Ct^5 - t}$. 6) $x(t) = t^2 + \frac{1 + t^3}{C - t}$.
 7) $x(t) = 3t + \frac{t}{6Ce^{-3t^2} - 1}$. 8) $x(t) = \frac{2}{t} + \frac{1}{t(Ct - 1)}$.

12.25 Să se integreze următoarele ecuații diferențiale de tip Riccati, știind că admit soluțiile particulare de forma $x^*(t) = \alpha t^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$:

- 1) $t(2t - 1)x' + x^2 + (4t + 1)x + 4t = 0$.
- 2) $(t^5 - 1)x' + 2tx^2 - t^4x - 3t^2 = 0$.

R: 1) $n = 1$, $\alpha = 2$, $x(t) = \frac{4Ct^3 - 1}{Ct^4 - t}$. 2) $n = 3$, $\alpha = -1$, $x(t) = \frac{Ct^3 - 1}{t^2 - C}$.

12.2 Alte ecuații integrabile prin metode elementare

12.26 Să se integreze ecuația $x = a_n(x')^n + a_{n-1}(x')^{n-1} + \dots + a_1x' + a_0$.

R: Punem $x' = p$. Atunci $dx = p dt$, $dt = \frac{1}{p} dx$, de unde

$$t = \int \frac{1}{p} (na_n p^{n-1} + (n-1)a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1) dp.$$

Soluția generală este dată de

$$\begin{cases} t = \frac{n}{n-1} a_n p^{n-1} + \frac{n-1}{n-2} a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_2 p + a_1 \ln p + C, \\ x = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0, \quad p > 0. \end{cases}$$

12.27 Să se integreze ecuația $x = (x')^2 \operatorname{tg} x'$.

R: $t = p \operatorname{tg} p - \ln(\cos p) + C$, $x = p^2 \operatorname{tg} p$.

12.28 Să se integreze ecuațiile:

$$1) x^{\frac{2}{3}} + (x')^{\frac{2}{3}} = 1. \quad 2) x^{\frac{2}{5}} + (x')^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}}, \quad a \neq 0.$$

R: 1) Luăm $x = \cos^3 \tau$ și $x' = \sin^3 \tau$. Rezultă $t = 3\tau + 3\operatorname{tg} \tau + C$, $x = \cos^3 \tau$. 2) Luăm $x = a \sin^5 \tau$ și $x' = a \cos^5 \tau$. Rezultă $t = 5 \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \tau - \operatorname{tg} \tau + \tau \right) + C$, $x = a \sin^5 \tau$.

12.29 Să se integreze ecuațiile:

$$\begin{aligned} 1) t &= 2x' + e^{x'}. & 2) t &= x' \sin x' + \cos x'. \\ 3) t &= \left(2(x')^2 - 2x' + 1 \right) e^{2x'}. & 4) t &= x' \sin x'. \end{aligned}$$

R: 1) Punem $x' = p$. Atunci $t = 2p + e^p$, $dx = p dt = (2p + pe^p) dp$. Soluția generală este dată de

$$t = 2p + e^p, \quad x = p^2 + (p - 1)e^p + C.$$

$$2) t = p \sin p + \cos p, \quad x = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C.$$

$$3) t = (2p^2 - 2p + 1) e^{2p}, \quad x = \left(2p^3 - 3p^2 + 3p - \frac{3}{2} \right) e^{2p} + C.$$

$$4) t = p \sin p, \quad x = (p^2 - 1) \sin p + p \cos p + C.$$

12.30 Să se integreze ecuația Lagrange $x = 2tx' + (x')^2$.

R: Punem $x' = p$. Atunci $x = 2tp + p^2$ și diferențiem: $dx = 2p dt + 2t dp + 2p dp$. Dar $dx = p dt$ și deci $\frac{dt}{dp} = -\frac{2}{p}t - 1$, care este o ecuație liniară, a cărei soluție generală, pentru $p \neq 0$, este $t = \frac{C}{p^2} - \frac{p}{3}$, încât soluția generală a ecuației date se scrie

$$t = \frac{C}{p^2} - \frac{p}{3}, \quad x = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}, \quad p \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Pentru $p = 0$ se obține $x(t) \equiv 0$, care este o soluție singulară.

12.31 Să se integreze ecuația Clairaut $x = tx' + (x')^n$.

R: Punem $x' = p$ și derivând obținem: $p = tp' + p + np^{n-1}p'$ sau $p'(t + np^{n-1}) = 0$. Avem: $p' = 0$, $p = C$, care dă soluția generală $x(t) = Ct + C^n$. Sau $t = -np^{n-1}$, $x = (1 - n)p^n$, care reprezintă o integrală singulară.

12.32 Să se integreze următoarele ecuații de tip Lagrange sau Clairaut:

$$\begin{aligned} 1) x &= 2tx' + \ln x'. & 2) x &= t(1 + x') + (x')^2. & 3) x &= 2tx' + \sin x'. \\ 4) x &= \frac{3}{2}tx' + e^{x'}. & 5) x &= 2t + (x')^2 - 4x'. & 6) x &= (x')^3 + t(x')^2. \\ 7) x &= (x')^2 + t(x')^2. & 8) x &= tx' + \sqrt{1 + (x')^2}. & 9) x &= 1 + tx' + (x')^2. \\ 10) x &= 2tx' - 4(x')^3. & 11) x &= tx' + x'(1 - x'). & 12) t(x')^2 - xx' &= 1. \end{aligned}$$

- R:** 1) $t = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$, $x + \ln p + \frac{2C}{p} - 2$, $p > 0$.
 2) $t = 2(1-p) + Ce^{-p}$, $x = [2(1-p) + Ce^{-p}](1+p) + p^2$.
 3) $t = \frac{C}{p^2} - \frac{\cos p}{p^2} - \frac{\sin p}{p}$, $x = \frac{2C}{p} - \frac{2\cos p}{p} - \sin p$, $p \neq 0$ și $x = 0$, soluție singulară.
 4) $t = \frac{C}{p^3} - 2e^p \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right)$, $x = \frac{3C}{2p^2} - 2e^p \left(1 - \frac{3}{p} + \frac{3}{p^2} \right)$, $p \neq 0$.
 5) $t = 2p + C$, $x = p^2 + 2C$ și $x = 2t - 4$, soluție singulară.
 6) $t = \frac{1}{(p-1)^2} \left(C - p^3 + \frac{3}{2}p^2 \right)$, $x = \frac{p^2}{(p-1)^2} \left(C + p - \frac{p^2}{2} \right)$ și $x = 0$, $x = t + 1$, soluții singulare.
 7) $t = \frac{1}{(p-1)^2} - 1$, $x = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}$ și $x = 0$, $x = t + 1$, soluții singulare.
 8) $x = Ct + \sqrt{1+C^2}$ și $t^2 + x^2 = 1$, soluție singulară.
 9) $x = Ct + 1 + C^2$ și $t = -2p$, $x = 1 - p^2$, soluție singulară.
 10) $t = 3p^2 + Cp^{-2}$, $x = 2p^3 - 2Cp^{-1}$, $p \neq 0$ și $x = 0$, soluție singulară.
 11) $x = Ct + C(1-C)$ și $t = 2p - 1$, $x = p^2$, soluție singulară.
 12) $t = Cx + C^2$ și $x^2 + 4t = 0$, soluție singulară.

12.33 Să se integreze ecuațiile:

$$1) \quad xx' + (t-x)x' - t = 0. \quad 2) \quad (x')^2 - (2x+t)x' + 2tx = 0.$$

R: 1) Ecuația se mai scrie: $t(x' - 1) + xx'(x' - 1) = 0$, deci $x' = 1$ sau $t = -xx'$. De unde: $x = t + C_1$ sau $x^2 + t^2 = C_2$.

2) Ecuația se mai scrie: $t(x' - 2x) = x'(x' - 2x)$, deci $x' = 2x$ sau $x' = t$. De unde $x = C_1 e^{2t}$ sau $x = \frac{1}{2}t^2 + C_2$.

12.34 Să se integreze ecuația $(x')^2 + tx' + 3x + t^2 = 0$.

R: Punem $x' = p$, avem $p^2 + tp + 3x + t^2 = 0$. Derivăm în raport cu t : $2pp' + p + tp' + 3p + 2t = 0$ sau $(2p+1)(p' + 2) = 0$. Din $p' = -2$ urmează $p = -2t + C$, de unde soluția generală

$$x(t) = -\frac{1}{3}[t^2 + t(C - 2t) + (C - 2t)^2], \quad t \in \mathbf{R}.$$

Apoi $t = -2p$ și $x = -p^2$, care reprezintă o integrală singulară.

12.35 Să se integreze ecuația $t = \frac{1}{x'}x + (x')^n$.

R: Punem $x' = p$, avem $t = \frac{1}{p}x + p^n$. Derivăm în raport cu x . Obținem $\frac{dp}{dx} \cdot (np^{n-1} - \frac{1}{p^2}) = 0$. Deci $\frac{dp}{dx} = 0$, $p = C$, de unde soluția generală $t(x) = \frac{1}{C}x + C^n$, sau $x = np^{n+1}$, $t = (n+1)p^n$, care reprezintă o integrală singulară.

12.3 Ecuații diferențiale de ordin superior

12.36 Să se găsească soluția ecuației $x^{(5)} = 0$, care satisface condițiile inițiale:

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 0, \quad x''(0) = -1, \quad x^{(3)}(0) = 0, \quad x^{(4)}(0) = 1.$$

R: Soluția generală este $x(t) = \frac{C_1}{4!}t^4 + \frac{C_2}{3!}t^3 + \frac{C_3}{2!}t^2 + \frac{C_4}{1!}t + C_5$. Condițiile inițiale precizate conduc la soluția particulară $x(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 1, t \in \mathbf{R}$.

12.37 Să se găsească soluția generală a ecuației $x'' = \frac{1}{t}$.

R: $x(t) = t \ln |t| + C_1 t + C_2$.

12.38 Să se determine soluția ecuației $x''' = \sin t$, care satisface condițiile inițiale $x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 0$.

R: Prin trei integrări succesive obținem soluția generală $x(t) = \cos t + \frac{1}{2}C_1 t^2 + C_2 t + C_3$. Soluția problemei lui Cauchy este $x(t) = \cos t + t^2 - t$.

12.39 Să se găsească soluția generală a ecuației $t = x'' + \ln x''$.

R: Punem $x'' = \tau$. Atunci $t = \tau + \ln \tau$. Avem $dx' = \tau dt = \tau(1 + \frac{1}{\tau})\tau$. Se obține soluția generală $t = \tau + \ln \tau, x = \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{3}{4}\tau^2 + C_1(\tau + \ln \tau) + C_2$.

12.40 Să se găsească soluția generală a ecuației $t = e^{x''} - (x'')^2$.

R: Punem $x'' = \tau$. Atunci $t = e^\tau - \tau^2$. Avem $dx' = \tau dt = \tau(e^\tau - 2\tau)d\tau$. De unde $x' = \tau e^\tau - e^\tau - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1$. Apoi $dx = x' dt = \left(\tau e^\tau - e^\tau - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1\right)(e^\tau - 2\tau)d\tau$. De unde

$$x = \left(\frac{1}{2}\tau - \frac{3}{4}\right)e^{2\tau} + \left(2\tau - 2 - \frac{2}{3}\tau^3 + C_1\right)e^\tau + \frac{4}{15}\tau^5 - C_1\tau^2 + C_2.$$

12.41 Să se integreze ecuațiile: 1) $x'' = 1 - (x')^2$. 2) $(x''')^2 + (x'')^2 = 1$. 3) $(x''')^2 = 2x''$.

R: 1) O reprezentare parametrică a ecuației este: $x' = \tau, x'' = 1 - \tau^2$. Din $dx' = d\tau$ și $dx' = (1 - \tau^2)dt$, obținem $dt = \frac{1}{1 - \tau^2}d\tau$. Deci $t = \frac{1}{2}\ln \left|\frac{1 + \tau}{1 - \tau}\right| + C_1$. Din $dx = \tau dt = \frac{\tau}{1 - \tau^2}d\tau$, de unde $x = -\frac{1}{2}\ln |1 - \tau^2| + C_2$.

2) O reprezentare parametrică a ecuației este: $x'' = \cos \tau, x''' = \sin \tau$. Din $dx'' = -\sin \tau d\tau$ și $dx'' = \sin \tau dt$, rezultă $dt = -d\tau$, deci $t = -\tau + C_1$. Din $dx' = \cos \tau dt = -\cos \tau d\tau$, urmează $x' = -\sin \tau + C_2$, iar din $dx = (-\sin \tau + C_2)dt = (\sin \tau - C_2)d\tau$, deducem $x = -\cos \tau - C_2\tau + C_3$.

3) Luăm $x''' = 2\tau$. Atunci $x'' = 2\tau^2$. Din $dx'' = 4\tau d\tau$ și $dx'' = 2\tau dt$, rezultă $dt = 2d\tau$, deci $t = 2\tau + C_1$. Din $dx' = 2\tau^2 dt = 4\tau^2 d\tau$, urmează $x' = \frac{4}{3}\tau^3 + C_2$, iar din $dx = \left(\frac{4}{3}\tau^3 + C_2\right) dt = 2\left(\frac{4}{3}\tau^3 + C_2\right) d\tau$, deducem $x = \frac{2}{3}\tau^4 + 2C_2\tau + C_3$.

12.42 Să se integreze ecuația $x^{(3)} \cdot x^{(4)} = -1$.

R: O reprezentare parametrică este $x^{(3)} = \tau$, $x^{(4)} = -\frac{1}{\tau}$, $\tau \neq 0$. Obținem $dx^{(3)} = d\tau$, $dx^{(4)} = -\frac{1}{\tau} d\tau$, deci $dt = -\tau d\tau$. Se obține soluția generală

$$t = -\frac{1}{2}\tau^2 + C_1, \quad x = -\frac{1}{105}\tau^7 + \frac{1}{8}C_1\tau^4 - \frac{1}{2}C_2\tau^2 + C_3.$$

12.4 Ecuații cărora li se poate micșora ordinul

12.43 Să se integreze ecuația $x^{(n)} \sin t - x^{(n-1)} \cos t + 1 = 0$.

R: Punem $x^{(n-1)} = u$ și ecuația se transformă într-o ecuație liniară în u : $u' \sin t - u \cos t + 1 = 0$. Cu soluția $u(t) = \cos t + C_1 \sin t$. Deci $x^{(n-1)} = \cos t + C_1 \sin t$, cu soluția generală:

$$x(t) = \cos\left(t - \frac{n-1}{2}\pi\right) + C_1 \sin\left(t - \frac{n-1}{2}\pi\right) + \frac{C_2}{(n-2)!}t^{n-2} + \dots + \frac{C_{n-1}}{1!}t + C_n.$$

12.44 Să se integreze ecuația $xx'' - (x')^2 = x^2$.

R: Ecuația nu conține pe t explicit. Punem $x' = u$, $x'' = u \frac{du}{dx}$ și obținem ecuația $xu \frac{du}{dx} = u^2 + x^2$, care este o ecuație omogenă. Luând $u = xy$, obținem $y dy = \frac{1}{x} dx$, de unde $y^2 = 2 \ln |x| + C_1$, deci $x' = x\sqrt{2 \ln x + C_1}$, cu soluția $x = e^{\frac{1}{2}((t-C_2)^2 - C_1)}$.

12.45 Să se integreze ecuațiile: 1) $txx'' + t(x')^2 - xx' = 0$. 2) $t^2xx'' = (x - tx')^2$.

R: Ecuațiile sunt omogene în x, x', x'' . 1) Cu schimbarea de funcție $\frac{x'}{x} = u$, obținem $x' = xu$, $x'' = x(u^2 + u')$ și deci ecuația devine $tu' - u + 2tu^2 = 0$. Rezultă $x = C_2\sqrt{t^2 + C_1}$.
2) $x = C_2te^{-\frac{C_1}{t}}$.

12.46 Să se integreze ecuația $t^2xx'' + t^2(x')^2 - 5txx' + 4x^2 = 0$.

R: Ecuația este omogenă de ordinul patru în t, x, dt, dx, d^2x . Împărțind prin t^2 se poate pune sub forma $\frac{x}{t} \cdot tx'' + (x')^2 - 5\frac{x}{t} \cdot x' + 4\left(\frac{x}{t}\right)^2 = 0$. Punem $t = e^\tau$, $x = tu$ și ecuația devine $uu'' + (u')^2 - 2uu' = 0$. Luând acum $u' = p$ obținem ecuația liniară $\frac{dp}{du} + \frac{1}{u}p - 2 = 0$, cu soluția $p(u) = \frac{1}{u}(u^2 + C_1)$. Deci $u' = \frac{1}{u}(u^2 + C_1)$. De unde $u^2(\tau) = C_2e^{2\tau} - C_1$. Rezultă $x^2 = t^2(C_2t^2 - C_1)$.

Capitolul 13

Ecuatii și sisteme diferențiale liniare

13.1 Sisteme diferențiale liniare de ordinul întâi

13.1 *Se dă sistemul:*

$$x' = -\frac{3}{t}x - \frac{1}{t}y, \quad y' = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}y, \quad t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = \frac{1}{t^2}, \quad y^1 = -\frac{1}{t^2}, \quad x^2 = \frac{1}{t^2} \ln t, \quad y^2 = -\frac{1}{t^2}(1 + \ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluții și să se scrie soluția generală a sistemului.

R: Soluția generală este:

$$x(t) = \frac{1}{t^2} (C_1 + C_2 \ln t), \quad y(t) = -\frac{1}{t^2} (C_1 \ln t + C_2 (1 + \ln t)).$$

13.2 *Se dă sistemul:*

$$x' = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{t}y, \quad y' = -\frac{4}{t}x + \frac{3}{t}y + 2, \quad t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = t, \quad y^1 = 2t, \quad x^2 = t \ln t, \quad y^2 = t(1 + 2 \ln t),$$

formează un sistem fundamental de soluții și să se scrie soluția generală a sistemului.

R: O soluție particulară a sistemului este: $x^*(t) = t \ln^2 t$, $y^*(t) = 2t(\ln^2 t + \ln t)$.

13.3 Se dă sistemul:

$$tx' = x + y, \quad ty' = -y + \frac{t}{(t+1)^2} - \ln(t+1), \quad t > 0.$$

Să se verifice că:

$$x^1 = t, \quad y^1 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{t}, \quad y^2 = -\frac{2}{t},$$

formează un sistem fundamental de soluții și să se scrie soluția generală a sistemului.

R: O soluție particulară a sistemului este: $x^* = \ln(t+1)$, $y^* = \frac{t}{t+1} - \ln(t+1)$.

13.4 Se dă sistemul:

$$x' = \frac{4}{t}x - \frac{4}{t^2}y + \frac{1}{t}, \quad y' = 2x - \frac{1}{t}y + t, \quad t \in (0, \infty).$$

Să se verifice că: $x_1(t) = 1$, $y_1(t) = t$ și $x_2(t) = 2t^2$, $y_2(t) = t^3$, $t \in (0, \infty)$, formează un sistem fundamental de soluții și să se scrie soluția generală a sistemului.

R: Deoarece $W(t) = -t^3 \neq 0$, cele două soluții formează un sistem fundametal de soluții pentru sistemul dat și deci soluția generală a sistemului omogen corespunzător este

$$x(t) = C_1 + 2C_2 t^2, \quad y(t) = C_1 t + C_2 t^3.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluție particulară de forma

$$x^*(t) = u(t) + 2t^2 v(t), \quad y(t) = t u(t) + t^3 v(t).$$

Derivând și înlocuind în sistem, obținem

$$u' + 2t^2 v' = \frac{1}{t}, \quad u' + t^3 v' = t,$$

sau, rezolvând în privința lui u' și v' :

$$u' = 2 - \frac{1}{t}, \quad v' = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3},$$

de unde, prin integrare $u(t) = 2t - \ln t$, $v(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$. Înlocuind în $x^*(t)$ și $y^*(t)$, obținem soluția particulară a sistemului neomogen

$$x^*(t) = 4t - 1 - \ln t, \quad y^*(t) = 3t^2 - \frac{1}{2}t - t \ln t$$

și deci soluția generală a sistemului neomogen este

$$x(t) = C_1 + 2C_2 t^2 + 4t - 1 - \ln t, \quad y(t) = C_1 t + C_2 t^3 + 3t^2 - \frac{1}{2}t - t \ln t, \quad t > 0.$$

13.2 Sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți

13.5 Să se determine soluția generală a sistemului diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți:

$$x' = 3y - 4z, \quad y' = -z, \quad z' = -2x + y.$$

R: Matricea transformării liniare asociate este

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuția caracteristică a transformării liniare T este $\lambda^3 - 7\lambda - 6 = 0$, cu rădăcinile $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$, simple. Deci transformarea T poate fi adusă la expresia canonică. Vectorii proprii corespunzători sunt

$$\mathbf{u}^1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}^2 = (5, 2, 4), \quad \mathbf{u}^3 = (5, 1, -3).$$

Deci funcțiile

$$\mathbf{x}^1(t) = e^{-t}(1, 1, 1), \quad \mathbf{x}^2(t) = e^{-2t}(5, 2, 4), \quad \mathbf{x}^3(t) = e^{3t}(5, 1, -3)$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală a sistemului se scrie atunci

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + 5C_2 e^{-2t} + 5C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}, \\ z(t) = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} - 3C_3 e^{3t}, \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

13.6 Să se determine soluția generală a sistemului

$$x' = y, \quad y' = -x.$$

R: Ecuția caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0$ și deci $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, iar vectorii proprii corespunzători $\mathbf{u}^1 = (1, i)$, $\mathbf{u}^2 = (1, -i)$. Un sistem fundamental de soluții (complexe) va fi

$$\mathbf{x}^1(t) = (e^{it}, ie^{it}), \quad \mathbf{x}^2(t) = (e^{-it}, -ie^{-it}).$$

Prin schimbarea precedentă, obținem sistemul fundamental de soluții (reale)

$$\mathbf{y}^1(t) = (\cos t, -\sin t), \quad \mathbf{y}^2(t) = (\sin t, \cos t),$$

încât, soluția generală a sistemului diferențial dat se va scrie

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

13.7 Să se determine soluțiile generale ale sistemelor:

$$1) \begin{cases} x' = x + y, \\ y' = x - y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $x(t) = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}, y(t) = C_1 (\sqrt{2} - 1) e^{t\sqrt{2}} - C_2 (\sqrt{2} + 1) e^{-t\sqrt{2}}.$
 2) $x(t) = -4C_1 e^t - 2C_2 e^{-t}, y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$

13.8 Să se determine soluția sistemului: $x' = 2x + y, y' = x + 2y$, care satisface condițiile inițiale: $x(0) = 1, y(0) = 3$.

R: $x(t) = e^{3t} - e^t, y(t) = 2e^{3t} + e^t.$

13.9 Să se determine soluția generală a sistemului $x' = y, y' = -x + 2y$.

R: Ecuația caracteristică este $(\lambda - 1)^2 = 0$ și deci $\lambda_1 = 1$, cu $m_1 = 2$, iar vectorul propriu corespunzător $\mathbf{u}^1 = (1, 1)$. Transformarea liniară T nu poate fi adusă la expresia canonică. Căutăm atunci soluția generală sub forma $x(t) = (a + bt)e^t, y(t) = (c + dt)e^t$. Derivând și înlocuind în sistem, obținem pentru a, b, c, d sistemul: $a + b = c, b = d, a - c + d = 0, b - 2c + d = 0$, care este compatibil dublu nedeterminat. Luând $a = C_1, b = C_2$, găsim $c = C_1 + C_2, d = C_2$ a.î. soluția generală va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^t, \quad y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^t.$$

13.10 Să se rezolve sistemul liniar: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, în care:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

R: Valorile proprii ale matricei A sunt: $\lambda_1 = 2, m_1 = 1, \mathbf{u}^1 = (2, 0, 1), \lambda_2 = 1, m_2 = 2, \mathbf{u}^2 = (1, 1, 1)$. O soluție a sistemului este $\mathbf{x}^1(t) = (2, 0, 1)e^{2t}$. Corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1, m_2 = 2$, căutăm o soluție de forma: $\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t)e^t$. Se obține prin identificare: $\mathbf{x}(t) = (C_2 + C_3 t, C_2 - C_3 + C_3 t, C_2 + C_3 t)e^t$. Soluția generală este:

$$\begin{cases} x(t) = 2C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t)e^t, \\ y(t) = (C_2 - C_3 + C_3 t)e^t, \\ z(t) = C_1 e^t + (C_2 + C_3 t)e^t. \end{cases}$$

13.11 Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0, \lambda_1 = 3, m_1 = 2$. Căutăm soluția sub forma: $\mathbf{x}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t)e^{3t}$. Se obține:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \quad y(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}.$$

2) $\lambda^2 + 9 = 0, \lambda_1 = 3i, \lambda_2 = -3i$. Se obțin soluțiile complexe:

$$\mathbf{x}^1(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, 1\right) e^{3it}, \quad \mathbf{x}^2(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, 1\right) e^{-3it}.$$

Dar:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{x}^1(t) + \mathbf{x}^2(t)) = \left(\frac{1}{2} \cos 3t - \frac{3}{2} \sin 3t, \cos 3t\right), \\ \frac{1}{2i}(\mathbf{x}^1(t) - \mathbf{x}^2(t)) = \left(\frac{1}{2} \cos 3t + \frac{3}{2} \sin 3t, \sin 3t\right), \end{cases}$$
 sunt soluții liniar independente reale.

Deci:
$$\begin{cases} x(t) = C_1 \left(\frac{1}{2} \cos 3t - \frac{3}{2} \sin 3t\right) + C_2 \left(\frac{3}{2} \cos 3t + \frac{1}{2} \sin 3t\right), \\ y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t. \end{cases}$$

3) $x(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t) e^{4t}$, $y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{4t}$.

13.12 Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 12x - 5y, \\ y' = 5x + 12y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$$

R: Avem:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x(t) = (C_1 \cos 3t - C_2 \sin 3t) e^{4t}, & y(t) = (C_1 \sin 3t + C_2 \cos 3t) e^{4t}. \\ 2) & \begin{cases} x(t) = (C_1 \cos 5t - C_2 \sin 5t) e^{12t}, & y(t) = (C_1 \sin 5t + C_2 \cos 5t) e^{12t}. \\ 3) & \begin{cases} x(t) = C_1 \cos 3t + (5C_2 - 3C_1) \sin 3t, & y(t) = C_2 \sin 3t + (2C_1 - 3C_2) \cos 3t. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

13.13 Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 3x - y + z, \\ y' = -x + 5y - z, \\ z' = x - y + 3z. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 3y - z, \\ z' = -x + 2y + 3z. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

R: 1) $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Se obține:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}, \\ y(t) = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t}, \\ z(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}. \end{cases}$$

2) $\lambda^3 - 8\lambda^2 + 22\lambda - 20 = 0$, valorile proprii: $2, 3 + i, 3 - i$ și deci:

$$\begin{cases} \mathbf{x}^1(t) = (1, 0, 1) = (1, 0, 1) e^{2t}, \\ \mathbf{x}^2(t) = (1, 1 + i, 2 - i) e^{(3+i)t}, \\ \mathbf{x}^3(t) = (1, 1 - i, 2 + i) e^{(3-i)t}. \end{cases}$$

Soluția reală este:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 \cos t + C_3 \sin t) e^{3t}, \\ y(t) = (C_2 (\cos t - \sin t) + C_3 (\cos t + \sin t)) e^{3t}, \\ z(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 (2 \cos t + \sin t) - C_3 (\cos t - 2 \sin t)) e^{3t}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \\ y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1 e^{2t} - C_3 e^{-t}. \end{cases}$$

13.14 Să se rezolve sistemele de ecuații diferențiale omogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2z, \\ z' = 2x. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = z + x, \\ x' = x + y. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 6x - 12y - z, \\ y' = x - 3y - z, \\ z' = -4x + 12y + 3z. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1) \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \sin t \sqrt{3} + C_2 e^{-t} \cos t \sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ y(t) = -\frac{1}{2} (C_1 + C_2 \sqrt{3}) e^{-t} \sin t \sqrt{3} + \frac{1}{2} (C_1 \sqrt{3} - C_2) e^{-t} \cos t \sqrt{3} + C_3 e^{2t}, \\ z(t) = -\frac{1}{2} (C_1 - C_2 \sqrt{3}) e^{-t} \sin t \sqrt{3} - \frac{1}{2} (C_1 \sqrt{3} + C_2) e^{-t} \cos t \sqrt{3} + C_3 e^{2t}. \end{cases}$$

$$2) x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, y(t) = -(C_1 + C_3) e^{-t} + C_2 e^{2t}, z(t) = C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}.$$

$$3) \begin{cases} x(t) = 2C_1 e^t + \frac{7}{3} C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{3t}, \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ z(t) = -2C_1 e^t - \frac{8}{3} C_2 e^{2t} - 3C_3 e^{3t}. \end{cases}$$

13.15 Să se rezolve sistemul omogen, cu condițiile inițiale precizate:

$$\begin{cases} x' = 8y, \\ y' = -2z, \\ z' = 2x + 8y - 2z, \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = -4, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{R}: x(t) = -4e^{-2t} - 2\sin 4t, y(t) = e^{-2t} - \cos 4t, z(t) = e^{-2t} - 2\sin 4t.$$

13.16 Să se determine soluția generală a sistemelor de ecuații diferențiale liniare neomogene:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y + 2e^t, \\ y' = x + 2y + 3e^{4t}. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$$

R: Avem:

$$1) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + te^t - e^{4t}, y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t}.$$

$$2) x(t) = C_1 t + C_2 + 2\sin t, y(t) = 2C_1 t - C_1 - 2C_2 - 3\sin t - 2\cos t.$$

13.17 Să se determine soluția problemei lui Cauchy pentru sistemul:

$$x' = x + y, y' = -2x + 4y,$$

cu condițiile inițiale: $x(0) = 0, y(0) = -1$.

$$\mathbf{R}: x(t) = (1-t)\cos t - \sin t, y(t) = (t-2)\cos t + t\sin t.$$

13.18 Să se determine soluția generală a sistemelor diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

$$1) \begin{cases} x' = y + 1, \\ y' = x + 1. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -2x - 4y + 1 + 4t, \\ y' = -x + y + \frac{3}{2}t^2. \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x' = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}, \\ y' = 2y - 2t - 1. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - 1$, $y(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - 1$.
- 2) $x(t) = C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t} + t + t^2$, $y(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2$.
- 3) $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + t + t^2$, $y(t) = 2C_1 e^{2t} + 1 + t$.

13.19 Să se determine soluția generală a sistemelor diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

$$1) \begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 2x + 3y + t. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -y + e^{3t}, \\ y' = -x + 2e^{3t}. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $x(t) = -\frac{3}{2}C_1 + 2C_2 e^{7t} - \frac{3}{7}t^2 - \frac{6}{49}t - \frac{6}{343}$, $y(t) = C_1 + C_2 e^{7t} - \frac{3}{49}t + \frac{2}{7}t^2 - \frac{3}{343}$.
- 2) $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{8}e^{3t}$, $y(t) = -C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{5}{8}e^{3t}$.

13.20 Să se rezolve următoarele sisteme, cu condițiile inițiale precizate:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 3. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 3x + 8y, \\ y' = -x - 3y, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 6, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $x(t) = 2e^{3t} - e^t$, $y(t) = 2e^{3t} + e^t$.
- 2) $x(t) = 4e^t + 2e^{-t}$, $y(t) = -e^t - e^{-t}$.

13.21 Să se rezolve următoarele sisteme, cu condițiile inițiale precizate:

$$1) \begin{cases} x' = y + t, \\ y' = x + e^t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = 3x - y + \sin t, \\ y' = -4x + 3y + \cos t, \end{cases} \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $x(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{-t} - 1 + \frac{1}{2}e^t t$, $y(t) = \frac{5}{4}e^t - \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t t - t$.
- 2) $x(t) = -\frac{9}{26}\cos t - \frac{3}{13}\sin t + \frac{75}{104}e^{5t} + \frac{5}{8}e^t$, $y(t) = -\frac{21}{26}\cos t - \frac{1}{26}\sin t - \frac{75}{52}e^{5t} + \frac{5}{4}e^t$.

13.22 Să se determine soluția generală a sistemelor diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

$$1) \begin{cases} x' = 2x + y - 2z - t + 2, \\ y' = -x + 1, \\ z' = x + y - z + 1 - t. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z + 4t - 2e^{-t} - 4, \\ y' = 6x - y - 6z - 6t - 6, \\ z' = -8x + 3y + 9z - 3e^{-t} + 8t - 9. \end{cases}$$

R: Avem:

- 1) $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 \sin t + C_3 \cos t, \\ y(t) = -C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t + t, \\ z(t) = C_2 \sin t + C_3 \cos t + 1. \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_2 + C_3)e^t + t, \\ y(t) = -2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^t + e^{-t}, \\ z(t) = 2C_1 e^{2t} + (C_2 t + C_3)e^t + 1. \end{cases}$

13.3 Ecuații diferențiale liniare de ordinul n

13.23 Se dă ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul al doilea:

$$x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0, \quad t \in I.$$

Să se arate că dacă $(x^1(t), x^2(t))$ formează un sistem fundamental de soluții al cărui wronskian este $W(t)$, atunci W este soluție a ecuației diferențiale: $W' + a_1(t)W = 0$ și să se deducă formula lui Abel - Ostrogradski - Liouville:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(- \int_{t_0}^t a_1(t) dt \right), \quad t_0 \in I.$$

Generalizare.

R: Avem: $(x^i)'' + a_1(t)(x^i)' + a_2(t)x^i = 0$, pentru $i = 1, 2$. Dar,

$$W'(t) = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ (x^1)' & (x^2)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 \\ -a_1(x^1)' & -a_1(x^2)' \end{vmatrix} = -a_1(t)W(t).$$

13.24 Se dă sistemul de funcții liniar independente $(x^1(t), x^2(t))$. Să se arate că ecuația diferențială liniară omogenă a cărei soluție generală este:

$$x(t) = C_1 x^1(t) + C_2 x^2(t),$$

cu C_1 și C_2 constante arbitrare, este:

$$\begin{vmatrix} x^1(t) & x^2(t) & x \\ (x^1(t))' & (x^2(t))' & x' \\ (x^1(t))'' & (x^2(t))'' & x'' \end{vmatrix} = 0.$$

Generalizare.

R: Derivând $x(t)$ de două ori, prin eliminarea lui C_1 și C_2 între cele trei relații se obține ecuația din enunț.

13.25 Să se formeze ecuația diferențială omogenă al cărui sistem fundamental de soluții este:

- 1) $x^1 = \sin t, \quad x^2 = \cos t.$
- 2) $x^1 = e^t, \quad x^2 = te^t.$
- 3) $x^1 = t, \quad x^2 = t^2.$
- 4) $x^1 = e^t, \quad x^2 = e^t \sin t, \quad x^3 = e^t \cos t.$

R: 1) $x'' + x' = 0$. 2) $x'' - 2x' + x = 0$. 4) $x''' - 2tx' + 2x = 0$. 4) $x''' - 3x'' + 4x' - 2x = 0$.

13.26 Să se arate că ecuația diferențială $x'' + a^2x = 0$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ admite soluțiile $x^1(t) = \cos at$, $x^2(t) = \sin at$ și să se scrie soluția generală.

R: Wronskianul sistemului $(x^1(t), x^2(t))$ este

$$W(t) = \begin{vmatrix} \cos at & \sin at \\ -a \sin at & a \cos at \end{vmatrix} = a \neq 0.$$

Deci $(x^1(t), x^2(t))$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația dată, iar soluția ei generală este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare.

13.27 Să se integreze ecuația $x'' + a^2x = \cos at$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Să se găsească soluția problemei lui Cauchy cu condițiile inițiale $x\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{\pi}{2a}$.

R: Soluția generală a ecuației omogene asociate este

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Căutăm o soluție particulară pentru ecuația neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos at + u_2(t) \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

în care $u'_1(t)$ și $u'_2(t)$ verifică sistemul

$$u'_1 \cos at + u'_2 \sin at = 0, \quad -au'_1 \sin at + au'_2 \cos at = \cos at.$$

Rezultă

$$u'_1 = -\frac{1}{2a} \sin 2at, \quad u'_2 = \frac{1}{2a} (1 + \cos 2at).$$

De unde, până la constante aditive arbitrare, obținem

$$u_1(t) = \frac{1}{4a^2} \cos 2at, \quad u_2(t) = \frac{1}{2a} t + \frac{1}{4a^2} \sin 2at.$$

Avem deci soluția particulară

$$x^*(t) = \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soluția generală a ecuației date se scrie atunci

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{1}{4a^2} \cos at + \frac{1}{2a} t \sin at, \quad t \in \mathbf{R}.$$

cu C_1, C_2 constante arbitrare. Soluția problemei lui Cauchy cu condițiile inițiale $x\left(\frac{\pi}{a}\right) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{\pi}{2a}$, cum $C_1 = -\frac{1}{4a^2}$, $C_2 = 0$, este $x(t) = \frac{t}{2a} \sin at$.

13.28 Să se integreze următoarele ecuații știind că ecuațiile omogene corespunzătoare admit soluțiile indicate:

$$\begin{array}{ll} 1) (2t+1)x'' + 4tx' - 4x = (2t+1)^2, & x^1 = t, \quad x^2 = e^{-2t}. \\ 2) (t^2+1)x'' - 2tx' + 2x = 2(t^2+1)e^t, & x^1 = t, \quad x^2 = t^2 - 1. \\ 3) tx''' = x'' - tx' + x = -t^2, & x^1 = t, \quad x^2 = e^t, \quad x^3 = e^{-t}. \end{array}$$

R: Avem:

$$\begin{array}{l} 1) x(t) = C_1 t + C_2 e^{-2t} + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}. \\ 2) x(t) = C_1 t + C_2 (t^2 - 1) + (t-1)^2 e^t. \\ 3) x(t) = C_1 t + C_2 e^t + C_3 e^{-t} + t^2 + 2. \end{array}$$

13.29 Să se integreze ecuația $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$, dacă $x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$ este o soluție particulară.

R: Se face schimbarea de variabilă dependentă $x = x_1 y$. Se obține:

$$x(t) = \frac{1}{t}(C_1 \sin t + C_2 \cos t).$$

13.30 Să se integreze ecuația $t^2(\ln t - 1)x'' - tx' + x = 0$, dacă $x_1(t) = t$ este o soluție particulară.

R: $x(t) = C_1 t - C_2 \ln t$.

13.4 Ecuații de ordinul n cu coeficienți constanți

13.31 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare de ordinul al doilea cu coeficienți constanți:

$$\begin{array}{lll} 1) x'' - 5x' + 6x = 0. & 2) x'' - 9x = 0. & 3) x'' - x' = 0. \\ 4) x'' + x = 0. & 5) x'' - 2x' + 2x = 0. & 6) x'' + 4x' + 13x = 0. \end{array}$$

R: 1) Ecuația caracteristică $r^2 - 5r + 6 = 0$, are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Soluția generală este $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$. 2) $x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}$. 3) $x(t) = C_1 + C_2 e^t$.

4) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. 5) $x(t) = e^t (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. 6) $x(t) = e^{-2t} (C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t)$.

13.32 Să se integreze ecuația $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$, $t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$.

R: Ecuația omogenă $x'' + x = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Soluția generală a ecuației omogene este deci

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Căutăm o soluție particulară pentru ecuația neomogenă sub forma

$$x^*(t) = u_1(t) \cos t + u_2(t) \sin t,$$

cu $u_1' \cos t + u_2' \sin t = 0$, $-u_1' \sin t + u_2' \cos t = \frac{1}{\cos t}$, de unde $u_1' = -\operatorname{tg} t$, $u_2' = 1$ și deci

$$u_1(t) = \ln |\cos t|, \quad u_2(t) = t,$$

încât, soluția generală a ecuației neomogene va fi

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \cos t \cdot \ln |\cos t| + t \sin t.$$

13.33 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul al doilea, neomogene:

- 1) $2x'' - x' - x = 4te^{2t}$. 2) $x'' - 2x' + x = te^t$. 3) $x'' + x = t \sin t$.
 4) $x'' + x = t^2 + t$. 5) $x'' + x' = t - 2$. 6) $x'' - x = te^{2t}$.
 7) $x'' - 7x' + 6x = \sin t$. 8) $x'' + 4x = t \sin 2t$. 9) $x'' + 3x' + 2x = t \sin t$.

R: 1) Se caută o soluție particulară de forma: $x^*(t) = e^{2t}(At + B)$. Se obține

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-\frac{t}{2}} + e^{2t} \left(\frac{4}{5}t - \frac{28}{25} \right).$$

2) Se caută o soluție particulară de forma: $x^*(t) = t^2 e^t(At + B)$. Se obține

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t.$$

3) Se caută o soluție particulară de forma: $x^*(t) = t[(At + B) \cos t + (Ct + D) \sin t]$.

Se obține

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{t^2}{4} \cos t + \frac{t}{4} \sin t.$$

$$4) x(t) = -2 + t + t^2 + C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

$$5) x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - 3t + \frac{1}{2} t^2.$$

$$6) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{3} \left(t - \frac{4}{3} \right) e^{2t}.$$

$$7) x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{6t} + \frac{7}{74} \cos t + \frac{5}{74} \sin t.$$

$$8) x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{8} t^2 \cos 2t + \frac{1}{16} t \sin 2t + \frac{1}{64} \cos 2t.$$

$$9) x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-t} + \left(-\frac{3}{10} t + \frac{17}{50} \right) \cos t + \left(\frac{1}{10} t + \frac{3}{25} \right) \sin t.$$

13.34 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordinul al doilea, neomogene:

- 1) $x'' + x' = 4t^2 e^t$. 2) $x'' + 10x' + 25x = 4e^{-5t}$.
 3) $x'' - 6x' + 9x = 25e^t \sin t$. 4) $x'' + 2x' + 5x = e^{-t} \cos 2t$.

R: Avem:

$$1) x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + (2t^2 - 6t + 7) e^t.$$

$$2) x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-5t} + 2t^2 e^{-5t}.$$

$$3) x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} t + (4 \cos t + 3 \sin t) e^t.$$

$$4) x(t) = C_1 e^{-t} \cos 2t + C_2 e^{-t} \sin 2t + \frac{1}{4} t e^{-t} \sin 2t.$$

13.35 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordin mai mare decât doi:

- 1) $x''' - 13x'' + 12x' = 0$ 2) $x''' + x = 0$. 3) $x^{(4)} 2x'' = 0$.
 4) $x''' - 3x'' + 3x' - x = 0$. 5) $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0$. 6) $x^{(4)} - 2x'' + x = 0$.
 7) $x''' - 2x'' - 3x' = 0$. 8) $x''' + 2x'' + x' = 0$. 9) $x''' + 4x'' + 13x' = 0$.

R: Avem:

- 1) $x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{12t}$.
 2) $x(t) = C_1 e^{-t} + e^{\frac{t}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$.
 3) $x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 e^{t\sqrt{2}} + C_4 e^{-t\sqrt{2}}$.
 4) $x(t) = e^t (C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$.
 5) $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos 2t + (C_3 + C_4 t) \sin 2t$.
 6) $x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + (C_3 + C_4 t) e^t$.
 7) $x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t}$.
 8) $x(t) = C_1 + (C_2 + C_3 t) e^{-t}$.
 9) $x(t) = C_1 + (C_2 \cos 3t + C_3 \sin 3t) e^{-2t}$.

13.36 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

- 1) $x'' + 4x' + 5x = 0$. 2) $x^{(5)} - 2x^{(4)} + 2x''' - 4x'' + x' - 2x = 0$.
 3) $x^{(4)} + 4x''' + 8x'' + 8x' + 4x = 0$. 4) $x^{(4)} - 4x''' + 5x'' - 4x' + 4x = 0$.

R: Avem:

- 1) $x(t) = (C_1 \cos t + C_2 \sin t) e^{-2t}$.
 2) $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t + C_5 e^{2t}$.
 3) $x(t) = [(C_1 + C_2 t) \cos t + (C_3 + C_4 t) \sin t] e^{-t}$.
 4) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (C_3 + C_4 t) e^{2t}$.

13.37 Să se găsească soluția generală a ecuației

$$x^{(4)} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = 40e^{-t} + \cos t.$$

R: Ecuația caracteristică $r^4 + 2r^3 + 5r^2 + 8r + 4 = 0$ are rădăcinile $r_1 = r_2 = -1$ și $r_3 = 2i$, $r_4 = -2i$. Soluția generală a ecuației omogene se scrie

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $r = -1$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, vom căuta o soluție particulară de forma

$$x^*(t) = At^2 e^{-t} + B \cos t + C \sin t.$$

Introducând în ecuație și identificând coeficienții, se găsește $A = 4$, $B = 0$, $C = \frac{1}{6}$ și deci soluția generală a ecuației neomogene va fi

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t + 4t^2 e^{-t} + \frac{1}{6} \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

13.38 Să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți de ordin mai mare decât doi, neomogene:

$$\begin{array}{ll} 1) x^{(4)} - 2x''' + x'' = e^t. & 2) x^{(4)} - 2x''' + x'' = t^3. \\ 3) x''' - x'' + x' - x = t^2 + t. & 4) x''' - x'' = 12t^2 + 6t. \end{array}$$

R: 1) Se caută $x^*(t) = At^2e^t$. Rezultă $x(t) = C_1 + C_2t + \left(C_3 + C_4t + \frac{t^2}{2}\right)e^t$.

2) Se caută $x^*(t) = t^2(A + Bt + Ct^2 + Dt^3)$. Rezultă

$$x(t) = (C_1 + C_2t) + (C_3 + C_4t)e^t + 12t^2 + 3t^3 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{20}t^5.$$

$$3) x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 e^t - 1 - 3t - t^2.$$

$$4) x(t) = C_1 + C_2t + C_3e^t - 15t^2 - 5t^3 - t^4.$$

13.39 Să se găsească soluția particulară a ecuației:

$$x''' + 2x'' + 2x' + x = t,$$

care verifică condițiile inițiale: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$.

$$\mathbf{R:} \quad x(t) = e^{-t} + e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + t - 2.$$

13.5 Ecuația lui Euler

13.40 Să se integreze ecuațiile Euler:

$$\begin{array}{ll} 1) t^2x'' + tx' + x = 1. & 2) t^2x'' + 3tx' + x = 0. \\ 3) t^2x'' - 4tx' + 6x = t. & 4) t^2x'' + 2tx' - 6x = 0. \\ 5) t^2x'' - 2tx' + 2x = t^2 - 2t + 2. & 6) t^2x'' - tx' - 3x = t. \end{array}$$

R: Avem:

$$1) x(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t) + 1.$$

$$2) x(t) = (C_1 + C_2 \ln t) \frac{1}{t}.$$

$$3) x(t) = C_1 t^3 + C_2 t^2 + \frac{1}{2}t.$$

$$4) x(t) = C_1 t^2 + C_2 \frac{1}{t^3}.$$

$$5) x(t) = C_1 t + C_2 t^2 - t^2 + 2t \ln t + 1 + t^2 \ln t + 2t.$$

$$6) x(t) = C_1 \frac{1}{t} + C_2 t^3 - \frac{1}{4}t.$$

13.41 Să se integreze ecuațiile Euler:

$$1) (t-2)^2 x'' - 3(t-2)x' + 4x = t-2.$$

$$2) t^3 x''' - t^2 x'' + 2tx' - 2x = t^3 + 2t.$$

$$3) (4t-1)^2 x'' - 2(4t-1)x' + 8x = 0.$$

$$4) (t+1)^3 x'' + 3(t+1)^2 x' + (t+1)x = 6 \ln(t+1).$$

R: Avem:

$$1) x(t) = t - 2 + [C_1 + C_2 \ln(t - 2)](t - 2)^2.$$

$$2) x(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t \ln t + \frac{1}{4} t^3 - t(\ln^2 t + 2 \ln t + 2).$$

$$3) x(t) = C_1 \sqrt{4t - 1} + C_2(4t - 1).$$

$$4) x(t) = \frac{C_1}{t+1} + \frac{C_2}{t+1} \ln(t+1) + \frac{1}{t+1} \ln^3(t+1).$$

13.42 Să se găsească soluția particulară a ecuației:

$$t^2 x'' = tx' + x = 2t,$$

care verifică condițiile inițiale: $x(1) = 0$, $x'(1) = 1$.

R: $x(t) = t(\ln t + \ln^2 t).$

Bibliografie

- [1] LIA ARAMĂ, T. MOROZANU, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral, Vol. I*, Editura Tehnică, București, 1967.
- [2] V. BARBU, *Ecuații diferențiale*, Editura Junimea, Iași, 1985.
- [3] G. N. BERMAN, *A Problem Book in Mathematical Analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [4] GH. BUCUR, E. CÂMPU, S. GĂINĂ, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral, Vol. II și III*, Editura Tehnică, București, 1967.
- [5] N. CALISTRU, GH. CIOBANU, *Curs de analiză matematică*, Rotaprint IPI, 1988.
- [6] G. CHILOV, *Analyse mathématique*, Éditions Mir, Moscou, 1984.
- [7] S. CHIRIȚĂ, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică și pedagogică, București, 1989.
- [8] A. CORDUNEANU, *Ecuații diferențiale cu aplicații în electrotehnică*, Editura FA-CLA, Timișoara, 1981.
- [9] A. CORDUNEANU, A. L. PLETEA, *Noțiuni de teoria ecuațiilor diferențiale*, Editura MATRIX ROM, București, 1999.
- [10] B. DEMIDOVICH, *Problems in mathematical analysis*, Mir Publishers, Moscow, 1981.
- [11] N. DONCIU, D. FLONDOR, *Analiză matematică. Culegere de probleme*, Editura ALL, București, 1993.
- [12] N. GHEORGHIU, T. PRECUPANU, *Analiză matematică*, Editura Didactică și pedagogică, București, 1979.
- [13] M. KRASNOV, A. KISELEV, G. MAKARENKO, E. SHIHIN, *Mathematical Analysis for Engineers*, Vol. I and II, Mir Publishers, Moscow, 1990.
- [14] V. A. KUDRYAVTSEV AND B. P. DEMIDOVICH, *A Brief Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [15] GH. MOROȘANU, *Ecuații diferențiale. Aplicații*, Editura Academiei, București, 1989.

- [16] C. P. NICOLESCU, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, București, 1984.
- [17] M. NICOLESCU, N. DINCULEANU, S. MARCUS, *Analiză matematică*, Vol. I, Editura Didactică și pedagogică, București, 1966.
- [18] GH. PROCOPIUC, *Matematică*, Tipografia Univ. Tehnice "Gh. Asachi" Iași, 1999.
- [19] GH. PROCOPIUC, GH. SLABU, M. ISPAS, *Matematică, teorie și aplicații*, Editura "Gh. Asachi" Iași, 2001.
- [20] GH. PROCOPIUC, N. IONESCU, *Algebră liniară și geometrie*, Editura Tehnica-Info, Chișinău, 2002.
- [21] GH. PROCOPIUC N. IONESCU, *Probleme de algebră liniară și geometrie*, Editura Tehnica-Info, Chișinău, 2002.
- [22] GH. PROCOPIUC, *Analiză matematică*, <http://ontario.tcm.tuiasi.ro/~tcm1>, 2002.
- [23] M. ROȘCULEȚ, *Analiză matematică*, Editura Didactică și pedagogică, București, 1984.
- [24] IOAN A. RUS, PARASCHIVA PAVEL, GH. MICULA, B. B. IONESCU, *Probleme de ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Editura Didactică și pedagogică, București, 1982.
- [25] A. A. SHESTAKOV, *A Course of Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1990.
- [26] GH. SIREȚCHI, *Calcul diferențial și integral, Vol. 1, Noțiuni fundamentale*, Ed. șt. și Encicl., București, 1985.
- [27] GH. SIREȚCHI, *Calcul diferențial și integral, Vol. 2, Exerciții*, Ed. Șt. și Encicl., București, 1985.
- [28] RODICA TUDORACHE, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. I, Calculul diferențial*, Univ. Th. Gh. Asachi Iași, 2000.
- [29] RODICA TUDORACHE, *Culegere de probleme de analiză matematică, Vol. II, Calculul integral*, Univ. Th. Gh. Asachi Iași, 2001.